Empirische Theorien: Modelle - Strukturen - Beispiele: die Grundzüge der modernen Wissenschaftstheorie

Balzer, Wolfgang

Wolfgang Balzer

Empirische Theorien: Modelle – Strukturen – Beispiele

Die Grundzüge der modernen Wissenschaftstheorie

V

Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig/Wiesbaden

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Balzer, Wolfgang:
Empirische Theorien: Modelle – Strukturen – Beispiele;
d. Grundzüge d. modernen Wissenschaftstheorie /
Wolfgang Balzer. – Braunschweig; Wiesbaden:
Vieweg, 1982.
(Wissenschaftstheorie, Wissenschaft und Philosophie; 20)
ISBN 3-528-08513-4

NE: GT

Druck und buchbinderische Verarbeitung: W. Langelüddecke, Braunschweig
Printed in Germany

ISBN 3-528-08513-4

Vorwort

Dieses Buch ist aus meiner Lehr- und Forschungstätigkeit der letzten sechs Jahre an der Universität Osnabrück und der Universität München hervorgegangen.Es entstand aus dem Wunsch, die Wissenschaftstheorie auch jenen interessant zu machen,die noch kein Studium einer empirischen Wissenschaft ganz oder zum großen Teil hinter sich haben.Es wendet sich demgemäß zuerst an den wissenschaftstheoretischen Laien.Trotzdem hoffe ich,auch dem Fachmann einige neue Aspekte bieten zu können: das Buch beruht zum Teil auf noch nicht veröffentlichten Arbeiten.Zumindest aber sollte es in Lehre und Unterricht nützlich sein,als Quelle für Beispiele und Übungen.

Die Kapitel I-IV können jeweils isoliert (eventuell kombiniert mit Teilen von Kapitel V) als Stoff für einen Kursus an der gymnasialen Oberstufe dienen -je nach Fachrichtung des Unterrichtenden.

Die im Text eingestreuten Übungen sind ein wesentlicher Bestandteil des Buches.Sie dienen fast ausschließlich der Einübung der im Text behandelten Ideen;in den ersten beiden Kapiteln darüberhinaus dem Erwerb minimaler mengentheoretischer Grundkenntnisse.Dem Leser,der die Übungen bearbeitet,sollte es möglich sein,sich die Begriffsbildungen und Fragestellungen selbständig und dauerhaft anzueignen.Eine bloße Lektüre ohne Bearbeitung der Übungen wird einen Einblick in die Wissenschaftstheorie vermitteln,der allerdings keine Grundlage für selbständiges Weiterarbeiten liefert.Die zwei mit einem Stern gekennzeichneten Textabschnitte sind etwas schwieriger und können beim ersten Studium übergangen werden.

Ich bin vielen Personen zu Dank für Diskussionen verpflichtet,die die hier behandelten Ideen klärten.Namentlich möchte ich erwähnen A.Kamlah und F.Mühlhölzer,die detaillierte Kritik und Vorschläge zu Kapitel IV beitrugen,T.Marcou,die wesentlich an der Rekonstruktion der Freudschen Theorie in Kap.I

mitwirkte und die Zeichnungen anfertigte,C.U.Moulines und J.D.Sneed,mit denen ich viele anregende Diskussionen hatte, und W.Stegmüller,an dessen Institut ich die seltene Atmosphäre vorfand,in der allein Wissenschaftstheorie gedeihen kann.

Das Buch ist Zati gewidmet.

München,den 10.2.82

Inhalt

Einleitung

Die Wissenschaftstheorie hat als Objekte einzelne Wissenschaften, wie Mathematik, Physik, Chemie, Biologie, Ökonomie; genauso wie etwa die Mechanik als Objekte "physikalische Teilchen" und deren Bewegungen hat. Der Unterschied zwischen einem physikalischen Teilchen und einer Wissenschaft -wenn beide Objekte wissenschaftlicher Untersuchungen sind- ist enorm. Man kann ein Teilchen ziemlich willkürlich beeinflussen, transportieren, Experimenten unterwerfen, teilen und verändern, was mit einer Wissenschaft kaum machbar sein dürfte. Es ist nicht erforderlich, hier auf alle Aspekte einzugehen, bezüglich derer sich eine Wissenschaft von den "normalen" Objekten wissenschaftlicher Theorien unterscheidet: der Leser kann leicht eine Vielzahl davon angeben.

Nun muß man im Hinblick auf die bisherigen Erkenntnisse der Wissenschaftstheorie sagen, daß sich ganze Wissenschaften weniger gut als Objekte der Untersuchung eignen, als die einzelnen Theorien, aus denen sich eine Wissenschaft zusammensetzt. Indem wir diesen Umstand berücksichtigen, werden auch wir uns im folgenden mit Theorien als dem Gegenstand unserer Untersuchungen befassen und daher die Wissenschaftstheorie in Abänderung des zuvor Gesagten als eine Wissenschaft betrachten, deren Objekte Theorien sind. In der als "Wissenschaftstheorie" bezeichneten Wissenschaft gibt es selbst wieder verschiedene Theorien und wir befassen uns hier ausschließlich mit einer dieser Theorien, die sich historisch aus dem logischen Empirismus unter besonderer Mitwirkung von P. Suppes, J.D. Sneed und W. Stegmüller entwickelt hat und in jüngster Zeit als "strukturalistische Theorienauffassung" bezeichnet wurde. Das vorliegende Buch enthält also eine Theorie über Theorien; man spricht auch von "Metatheorie". Wir werden versuchen, über empirische (d.h. auf Erfahrung beruhende) Theorien im allgemeinen Aussagen zu machen,genauso wie es die Physiker über bewegte Teilchen, die Biologen über Zellen und die Ökonomen über Märkte tun.Damit aber diese Aussagen mehr enthalten als bloß unsere Vorstellungen oder Wünsche,müssen wir sie an konkreten Beispielen (d.h.an konkreten Theorien) überprüfen.Wir können sagen,daß der Objektbereich unserer Metatheorie den Bereich aller bisher aufgestellten empirischen Theorien umfaßt.Unsere Metatheorie soll über diesen Bereich allgemeine Aussagen machen und diese müssen in dem Bereich überprüft werden.

Es ergibt sich jedoch eine für die Wissenschaftstheorie eigentümliche Schwierigkeit daraus,daß die Objekte aus dem Bereich -also einzelne empirische Theorien- äußerst komplexe Gebilde sind.Um zu interessanten und durch Beispiele belegbaren Aussagen zu kommen,muß der Wissenschaftstheoretiker mindestens einige Beispiele selbst kennen ,d.h.er muß einige empirische Theorien kennen,studieren,sich aneignen.Diese Forderung ist leicht zu formulieren,aber schwer in die Praxis umzusetzen.Ein Student studiert vier Jahre,um eine Wissenschaft und einige Theorien dieser Wissenschaft zu beherrschen.Auch professionelle Wissenschaftler beschäftigen sich im Laufe ihres Lebens nur mit einigen wenigen Theorien.Dies bleibt selbst bei überragenden Wissenschaftlern richtig,wenn man die Zahl der von ihnen beherrschten Theorien mit der Gesamtzahl der heute existierenden Theorien vergleicht.Der Wissenschaftstheoretiker muß also ungleich mehr Zeit als andere Wissenschaftler darauf verwenden,sich ein grundlegendes Wissen anzueignen,bevor er zu spezifisch wissenschaftstheoretischen Aussagen und Überlegungen imstande ist.

Diese Schwierigkeit äußert sich heute etwa darin,daß die meisten Wissenschaftstheoretiker ein abgeschlossenes Studium einer empirischen Wissenschaft hinter sich bringen,bevor sie ihre eigentliche wissenschaftliche Tätigkeit beginnen.Es ist nicht zu leugnen,daß dieser Sachverhalt zu einem beträchtlichen Aufschwung in der Wissenschaftstheorie geführt hat.Andererseits gibt es aber auch zwei Aspekte,unter denen diese Entwicklung nicht optimal ist.

Einmal konzentriert sich ein Wissenschaftstheoretiker,der vorher eine bestimmte empirische Wissenschaft gelernt hat,aus naheliegenden Gründen zunächst und oft weitgehend auf wissenschaftstheoretische Fragen,die sich aus dieser speziellen Wissenschaft ergeben.Das heißt,er entwickelt -im wesentlichen- eine Metatheorie einer speziellen Wissenschaft.Oft sind auch die Fachwissenschaftler selbst an metatheoretischen Fragen ihres Gebietes interessiert,sodaß die entsprechende Metatheorie sich ganz oder teilweise als Teilgebiet der entsprechenden Wissenschaft entwickelt,wie es z.B.in Mathematik und Physik der Fall ist.Gerade in unserer Zeit des ungeheuren Spezialistentums ist jedoch auch eine wissenschaftsübergreifende Metatheorie nötig und erwünscht.

Zum anderen ist Wissenschaftstheorie,solange sie sich nur an voll ausgebildete Wissenschaftler wendet,eine praktisch nicht lehrbare Disziplin.Dem "normalen" Studenten fehlen die Voraussetzungen,um die diskutierten Beispiele zu verstehen,der Student,der schon ein Studium hinter sich hat,sträubt sich aus verschiedenen Gründen,Aussagen über seine Wissenschaft zu akzeptieren,die notwendigerweise nicht im "Jargon" gerade dieser Wissenschaft formuliert sind.

Um Wissenschaftstheorie als eigenständiges Gebiet zu etablieren und zu erhalten,muß,so meinen wir,einerseits die einseitige Ausrichtung auf je eine Wissenschaft durchbrochen werden und andererseits eine Darstellung verschiedener empirischer Theorien so erfolgen,daß daß man sie sich in relativ kurzer Zeit aneignen kann.

Den Einwand,daß dies mit Sicherheit zum Dilettantismus führe,können wir nicht ernst nehmen.Es ist zweifellos möglich, irgendeine empirische,z.B.physikalische Theorie zu erlernen, ohne ein entsprechendes Hochschulstudium zu absolvieren.Und es ist ebenso möglich,sich eine solche Theorie in kurzer Zeit (maximal einigen Wochen) anzueignen,wenn sie didaktisch gut dargestellt wird.(Man vergegenwärtige sich,daß an "guten" Universitäten die spezielle Relativitätstheorie (vergleiche Kap.IV) in der Regel im Rahmen der Vorlesung über Elektrodynamik in zwei oder vier Stunden abgehandelt wird.)

Das vorliegende Buch stellt einen ersten Versuch dar,der aufgezeigten Schwierigkeit zu begegnen.Vier der fünf Kapitel dienen hauptsächlich der Darstellung empirischer Theorien, allerdings unter dem Blickwinkel der Wissenschaftstheorie.Der mit einer der behandelten Theorien vertraute Leser darf sich nicht wundern,wenn eine solche Darstellung in Form und Sprache von dem abweicht,was er im Zusammenhang mit der jeweiligen Theorie bisher vorfand.Das Ziel der hier behandelten Darstellungen ist nicht,den Leser zu speziellem Weiterforschen auf dem jeweiligen Gebiet hinzuführen oder vorzubereiten;das Ziel ist,ihm die begriffliche und logische Struktur der jeweiligen Theorie möglichst präzise darzulegen.Eine solch präzise Ausarbeitung der Theorie ist für den forschenden Fachwissenschaftler meist nicht nötig,oft sogar hinderlich.Er beherrscht seine Theorie so "virtuos",daß er Präzisierungen jeweils da und nur da vornehmen kann,wo sie ihm bei der Lösung eines bestimmten Problems weiterhilft.Der Wissenschaftstheoretiker aber,der ganze Theorien untersucht und miteinander vergleicht, ist bemüht,zumindest diese eine Quelle der Vagheit,nämlich die Vagheit der umgangssprachlich formulierten Theorien,möglichst gut zu verstopfen.

Es fragt sich natürlich,wozu dies und damit Wissenschaftstheorie überhaupt gut sei.Neben einigen nicht so wichtigen Gründen lassen sich zwei für die Wissenschaftstheorie erhebliche rechtfertigende Gründe angeben.

Erstens dient die wissenschaftstheoretische Bearbeitung und Durchdringung empirischer Theorien dazu,diese zu klären,zu präzisieren,ihre Unterschiede und Gemeinsamkeiten herauszuarbeiten,die Probleme und Methoden ihrer Anwendung und Überprüfung zu formulieren.Dies alles hat sicher Konsequenzen für die Lehrbarkeit solcher Theorien: die Wissenschaftstheorie liefert der Didaktik Material,aufgrund dessen man bessere Schul- und Lehrbücher produzieren kann.Damit läßt sich viel sinnlose Paukerei vermeiden und wertvolle Zeit zur besseren Nutzung einsparen.

Zweitens ist Wissenschaftstheorie eine philosophische Disziplin.Nach Kant ist eine der Hauptfragen der Philosophie: "Was können wir wissen?" ;und die wissenschaftlichen Bemühungen zur Beantwortung dieser Frage fallen in eine der philosophischen Grunddisziplinen,nämlich die Erkenntnistheorie.Wie immer man zu einer genaueren Bestimmung der Erkenntnistheorie ansetzt,so dürfte doch folgendes klar sein.Eine Antwort auf die obige Kant'sche Frage kann nur der geben,der auch sagt, was Wissen (=Erkenntnis?) ist und wie der Erwerb von Wissen funktioniert.Und ein wesentlicher Weg,dies zu schaffen,besteht sicher darin,zu schauen,was in den Wissenschaften als Wissen angesehen wird und wie die Wissenschaften funktionieren.Genau dies aber tut die Wissenschaftstheorie.

Man wird nicht erwarten,durch bloße Untersuchung empirischer Theorien eine erschöpfende Antwort auf die obige Frage Kants zu finden.Aber wir bestehen darauf,daß ohne solche Untersuchungen keine erschöpfende Antwort möglich ist.In diesem Sinn betrachten wir die Wissenschaftstheorie als einen wesentlichen Teil der Erkenntnistheorie und damit der Philosophie. Und daß das Nachdenken über seine eigenen Möglichkeiten in Bezug auf Wissen,Glauben,Wünsche und Hoffnungen,also das "Philosophieren",einen Wert "an sich" darstellt,darüber sollte in unserer rastlos auf Sachzwänge reagierenden,"von außen" vorgegebene Ziele optimal erreichenden Gesellschaft Einigkeit bestehen.

Kapitel I Psychologie: Sigmund Freud

Es fällt schwer,eine kurze und oberflächliche "Definition" von "Psychologie" zu geben,ohne auf Wörter zurückzugreifen, die ähnlich vage sind,wie das Wort "Psychologie" selbst.Um die Psychologie,an deren Entwicklung Sigmund Freud maßgeblichen Anteil hatte,verstehen zu lernen,scheint es daher zweckmäßig, zunächst einige Beispiele zu betrachten,mit denen Freud zu tun hatte.

Er berichtet über eine Patientin,die unter Agoraphobie (Platzangst) und Anfällen von Todesangst litt.Bei dem Versuch, die Krankheit der 38-jährigen Frau in die Vergangenheit zurückzuverfolgen und zu sehen,wann und warum sie erstmals solche Anfälle gehabt hatte,ergab sich nach einigen Bemühungen folgendes Bild.Der erste derartige Anfall hatte vor 21 Jahren,als die Patientin also 17 Jahre alt war,stattgefunden.Sie machte gerade einige Besorgungen einen Ball betreffend,zu dem sie eingeladen war.Einige Tage vorher war ihre Freundin gestorben.Sie ging durch die Straße,in der ihre Freundin gewohnt hatte.In Gedanken an den Ball,an dem sie unbedingt teilnehmen wollte, hatte sie die Erinnerung an den Tod der Freundin zurückgedrängt.Außerdem hatte sie an diesem Tag gerade ihre Periode, die einzige im ganzen Jahr.Zwei Häuser hinter dem Haus ihrer Freundin bekommt sie einen Anfall von Schwindel mit Angst und Ohnmachtsgefühl.Gleichzeitig denkt sie,daß sie sterben müsse. Seit diesem Erlebnis hat sie mehrmals ähnliche Anfälle gehabt.

Einen zweiten Fall bildet das Bauernmädchen aus den Alpen, das unter Depressionen und Angstzuständen leidet.Die Vorgeschichte ergibt hier folgendes.Das Mädchen lebte bei seinem Onkel,wo es in Haus und Hof mithelfen mußte.Vom Onkel wurde es wiederholt bedroht,wobei ihm der Charakter der Drohungen jedoch nicht klar war (Schläge oder sexuelle Andeutungen).Das Mädchen sah den Onkel zweimal -ohne daß es ihm nachspioniert hätte- beim Geschlechtsakt mit der Magd.Es ist seitdem bedrückt und leidet vor allem auf dem längeren Weg ins Dorf,den es oft alleine gehen muß,unter Angstzuständen.

Solche und ähnliche Fälle "seelischer (psychischer) Krankheiten",wie Freud sie in seinen Werken verstreut schildert [Freud,1967],bildeten die Basis für Freuds theoretische Überlegungen.Er wollte ein Modell entwerfen,das die Entstehung solcher Krankheiten erklärte.Da Freud im Laufe seines Lebens mehrere verschiedene Theorien entwickelte,deren innerer Zusammenhang zwar interessant ist,aber hier nicht behandelt werden kann,beschränken wir uns auf die Diskussion einer dieser Theorien.Weiter sind Freuds Theorien umgangssprachlich und nicht allzu präzise formuliert.Sie enthalten vom Standpunkt der heutigen Logik aus betrachtet erhebliche Vieldeutigkeiten und Lücken.Wir haben deshalb eine der vielen Deutungsmöglichkeiten ausgewählt und die vorhandenen Lücken auf eine bestimmte Art geschlossen,um zu einer präzisen Theorie zu kommen.Das Resultat wird dem Leser,der Freud nur buchstabengetreu auslegen will,als weit vom Original entfernt vorkommen.Wir meinen aber,inhaltlich keine gewaltsamen Veränderungen vorgenommen zu haben.Allerdings bestehen wir nicht darauf,unsere Version als <u>die</u> oder <u>eine der</u> Freudschen Theorien hinzustellen.

Versuchen wir nun,die beiden Beispiele in einer mehr theoretischen Sprache zu behandeln.Im ersten Fall (Frau mit Platzangst) traten die Krankheiterscheinungen erstmals im Zusammenhang mit Erlebnissen auf,die von Seiten der Frau als sehr unangenehm und negativ empfunden wurden: dem Tod ihrer Freundin und ihrer Periode.Die Erlebnisse sind ihr bewußt,sie denkt darüber nach.Daneben spielen aber auch andere,angenehme Erlebnisse eine Rolle: die Teilnahme an dem Ball.Die Frau assoziiert Gedanken an den Tod ihrer Freundin und über ihre Periode mit Vorstellungen über den bald stattfindenden Ball.Der wesentliche theoretische Begriff zur weiteren Analyse ist nun der Begriff des Unbewußten.Mit seiner Hilfe stellt sich die weitere Beschreibung des Falles wie folgt dar.In der Frau (wie in jedem Menschen) laufen ständig unbewußte psychische Akte ab.In der Regel drängen diese Akte (die z.B.aus Trieben resultieren) danach,durch Handlungen und damit verbundene Erlebnisse realisiert oder zumindest bewußt gemacht zu werden. Zum Beispiel erzeugt der Hunger psychische Akte,die durch Essen realisiert (d.h."verwirklicht") werden.Wenn nun die Realisierung eines psychischen Aktes,sei es in Form eines Gedankens oder einer Handlung,mit sehr unangenehmen Erlebnissen verknüpft ist,so kann es vorkommen,daß in der Folge jede Realisierung des psychischen Aktes schon im Keim "krankhaft" unterdrückt wird.Die relevanten psychischen Akte der Frau stammen aus dem Sexualtrieb.Eine mögliche Realisierung wäre die Teilnahme am Ball.Die Akte selbst sind unbewußt,die Realisierungsmöglichkeiten hingegen bewußt.Durch die Assoziation mit negativen Erlebnissen werden die psychischen Akte abgeblockt,ihre Realisierung unterdrückt: es entstehen die Krankheitssymptome.

Im zweiten Fall läuft die theoretische Beschreibung ähnlich.Auch hier hat das Mädchen starke negative Erlebnisse: die Drohungen des Onkels und die Erlebnisse von dessen Geschlechtsakten.Auch hier wird erst durch die Verbindung dieser bewußten Erlebnisse mit unbewußten psychischen Akten die heftige Reaktion erklärbar.In dem Mädchen finden durch den Sexualtrieb hervorgerufene psychische Akte statt.Realisierungen dieser Akte dürften bei dem Mädchen in Form von vagen sexuellen Vorstellungen schon vorhanden gewesen sein.Diese Vorstellungen treffen nun mit den negativen Erlebnissen zusammen und führen durch Verhinderung weiterer Realisierungen der psychischen Akte zu den depressiven Zuständen.Das theoretische Modell ist also in beiden Fällen das gleiche (ÜI-1).

Bei der zunächst noch ziemlich vagen Beschreibung des Modells können wir zwei Schritte unterscheiden.Einmal werden neue Begriffe,neue Wörter eingeführt,die zwar in der Sprache schon vorhanden sind,aber im Rahmen des Modells doch eine speziellere Funktion und Bedeutung haben.Zum anderen werden mit Hilfe dieser Begriffe theoretische Zusammenhänge hergestellt und erläutert.Erst beide Züge zusammen ergeben das theoretische Modell.Man kann sich klarmachen,daß eine dieser Komponenten alleine noch kein Modell ausmachen würde.Die Einführung neuer Begriffe allein liefert keine Einsicht in Zusammenhänge und die Beschreibung von Zusammenhängen ohne Hervorhebung bestimmter spezieller Begriffe unterscheidet sich nicht von einer alltagssprachlichen Beschreibung,die gar keinen Anspruch darauf erhebt,ein theoretisches Modell zu vermitteln.

An der Diskussion der Beispiele sieht man,daß folgende Begriffe eingeführt werden: psychischer Akt,Erlebnis,Bewußtes, Unbewußtes,negatives Erlebnis,assoziierte Erlebnisse,Realisierung eines Aktes durch ein Erlebnis.Die Bedeutung dieser Begriffe muß anhand der Beispiele erläutert werden.Mit Hilfe der Begriffe kann man dann theoretische Zusammenhänge beschreiben wie es in den Beispielen schon angedeutet wurde: etwa den Zusammenhang,daß psychische Akte in der Regel nach realisierenden Handlungen oder Erlebnissen drängen.

Wir können die beiden Schritte auch folgendermaßen ausdrücken.Zuerst werden Begriffe eingeführt und dann wird gesagt,wie die Begriffe miteinander verknüpft sind.Die Beziehungen zwischen den Begriffen sind meist so geartet,daß man sie aus der Kenntnis der Begriffe nicht erschließen kann.Sie sind also nicht trivial,sondern haben einen echten neuen Inhalt.Wir reden daher auch von <u>inhaltlichen</u> Beziehungen.Die Sätze,die die inhaltlichen Beziehungen wiedergeben,nennt man <u>Axiome</u>.

Abschließend noch zwei Bemerkungen.Erstens deuten die beiden genannten Schritte: Einführung von Begriffen und Formulierung inhaltlicher Beziehungen,keine zeitliche Reihenfolge an.Bei der Bildung einer Theorie werden beide Schritte in der Regel simultan erfolgen.Zusammen mit der Formulierung von Beziehungen werden die Begriffe klarer und mit versuchsweise angesetzten Begriffen werden neue Beziehungen formuliert.Die Unterscheidung zwischen Begriffen und inhaltlichen Beziehungen ist also nicht zeitlich,sondern rein systematisch zu verstehen.Zweitens kann bei beiden Schritten eine gewisse Willkür nicht ausgeschlossen werden.Meistens kann man einige der Begriffe durch andere ersetzen und erhält nach entsprechender Modifikation der inhaltlichen Beziehungen ein gleichartiges oder ähnliches Modell.Aber ein gewisses Maß an Willkür bedeutet noch lange keine völlige Willkür.Es gibt selbstverständlich Kriterien,die wir beim Aufstellen von Theorien,bei der Auswahl von Begriffen und bei der Formulierung von Axiomen befolgen.Solche Kriterien genau anzugeben ist allerdings schwierig.Im Fall von Freuds Theorie gibt es auch Daten aus Freuds Leben,die darauf hinweisen,wie Freud auf seine Theorie gekommen ist.Im Lichte dieser Daten ist die Theorie, die er vorschlägt,plausibel.Es gibt aber eine große Zahl anderer,"möglicher" Theorien,die mit den gleichen Daten verträglich wären.

POTENTIELLE MODELLE

Die Analyse eines Beispiels und seine Erfassung mit Hilfe der Begriffe der Theorie liefert ein Modell.Das Modell ist immer viel gröber als der konkrete Fall,den es beschreibt, denn es werden nur diejenigen Aspekte des konkreten Falls erfaßt,die sich mit Hilfe der benutzten Begriffe überhaupt erfassen lassen.Unzählige individuelle Züge des jeweils betrachteten,konkretens Falls haben mit diesen Begriffen nicht das geringste zu tun: z.B.die Augenfarbe,die Körpergröße,die gerade getragene Kleidung etc. bei den oben beschriebenen Beispielen.

Wir wollen den Übergang von einem konkreten Fall zu einem Modell anhand eines Beispiels genauer vollziehen,um zu sehen, wie die Modelle der Freudschen Theorie genauer aussehen.Dabei ist folgender Punkt wichtig.In Modellen werden diejenigen Eigenschaften erfaßt,die regelmäßig auftreten.Bei psychologischen (und allgemein auch: bei medizinischen) Theorien ist Gesundheit die Regel und Krankheitsfälle bilden die Ausnahme. Man versucht in solchen Theorien zunächst die Funktionsweise und den Ablauf des gesunden Organismus zu verstehen und zu beschreiben,um die verschiedenen Krankheiten als verschiedene Abweichungen von der Normalfunktion erklären zu können.Das zu entwickelnde Modell wird also zunächst den Normalfall beschreiben,in dem keine psychischen Störungen auftreten.

Betrachten wir ein etwas triviales (sehr "gesundes") Beispiel.Herr Meier war den ganzen Tag beruflich unterwegs und kam nicht dazu,etwas zu essen.Starke psychische Akte,ausgelöst durch den Hunger,bewegen ihn unmittelbar,nachdem er zu Hause ankommt,zur Handlung: er setzt sich hin und ißt.Welche Züge müssen wir berücksichtigen,um diesen Fall als Modell zu beschreiben? Was muß über die bisher aufgezählten Begriffe konkret gesagt werden,damit man ein Modell erhält?

Zunächst muß die Beschreibung eine bestimmte Zeitspanne angeben,denn nur aufgrund der Tatsache,daß M.längere Zeit nichts gegessen hatte,kam er zur Handlung.Die Zeit war bisher nicht explizit (ausdrücklich hervorgehoben) als Begriff erwähnt worden,aber es ist klar,daß sie zur Beschreibung nötig ist. Würde man Herrn M.s Tätigkeiten während einer anderen Zeitspanne beschreiben,in der er z.B.öfter ißt,so würde die Beschreibung vermutlich kein Modell der gerade geschilderten Handlungen ergeben.Weiter müssen im Modell Herrn M.s relevante psychische Akte spezifiziert werden.Da man keinen vollständigen Überblick über alle für M. möglichen psychischen Akte hat, wird man auch die zu verschiedenen Tageszeiten bei M.wirksamen Akte nicht alle angeben können.Welche der Akte jeweils relevant sind,kann nur im konkreten Fall entschieden werden. In unserem Fall sind sicher diejenigen psychischen Akte relevant,die in M. aufgrund des Nahrungstriebes wirken.Die Beschreibung muß also die Angabe dieser Akte enthalten.Es scheint intuitiv einleuchtend,daß die Akte umso "stärker" werden,je mehr Zeit vergeht.In der Tat finden sich bei Freud ähnliche Wendungen,wenn er etwa von der Triebenergie spricht, die in mehr oder weniger großem Maß vorhanden sein kann.Wir werden hier jedoch von solchen Vergleichen keinen Gebrauch machen.Auch muß betont werden,daß die Akte hier nur aufgrund der Wahl des Beispiels banal wirken.In anderen Fällen,wo sie etwa Gefühlen und "höheren" Empfindungen zugeordnet sind,verliert sich diese Banalität.

Die genannten psychischen Akte sind in M.spätestens vermutlich nach der Mittagszeit wirksam.Es erweist sich als zweckmäßig,zu unterscheiden zwischen den für M. möglichen Akten und den zu einer bestimmten Zeit in M. wirksamen.So sind sicherlich die vom Sexualtrieb hervorgerufenen Akte für M. möglich (falls M. in dieser Richtung normal veranlagt ist),aber an dem betrachteten Tag vermutlich nicht wirksam.Wir vereinbaren,das Unbewußte durch Angabe der zu jedem Zeitpunkt wirksamen psychischen Akte zu beschreiben. Das Modell wird also die Angabe enthalten, daß M.s Unbewußtes in der ersten Tageshälfte eventuelle, aber irrelevante Akte enthält, in der zweiten Tageshälfte jedoch solche Akte, die durch den Nahrungstrieb hervorgerufen sind.

Weiter muß das Modell M.s relevante oder mögliche Erlebnisse enthalten. Wieder ist eine Auswahl zu treffen,welche Erlebnisse im konkreten Fall relevant sind. Hierzu gehören bei M. sicher die Erlebnisse des Essens, aber auch schon M.s Denken an Essen oder M.s Vorstellungen vom Essen. Wir wollen auch solche Gedanken oder Vorstellungen als mögliche Erlebnisse bezeichnen, sodaß also alles, was im weitesten Sinne bewußt sein kann, als mögliches Erlebnis zählt. Die Beschreibung wird unter den für M. relevanten möglichen Erlebnissen die des Essens oder der Vorstellung des Essens enthalten müssen. Analog wie bei Akten und Unbewußtem unterscheiden wir auch hier die Menge der für M. möglichen Erlebnisse von den Erlebnissen,denen M. zu einem bestimmten Zeitpunkt "ausgesetzt" ist. Letztere machen gerade den Inhalt seines Bewußtseins zu einem bestimmten Zeitpunkt aus. Wir identifizieren also M.s Bewußtsein mit den zu verschiedenen Zeiten auf ihn wirkenden Erlebnissen. M.s Beschreibung als Modell muß daher die Angabe enthalten, daß sein Bewußtsein ab einem bestimmten Zeitpunkt (etwa ab 15 Uhr nachmittags, oder auch erst nach Erledigung seiner Arbeiten) Vorstellungen des Essens (als mögliche Erlebnisse) enthält.

Zwischen M.s psychischen Akten und möglichen Erlebnissen besteht eine Beziehung, die wir Realisierungsrelation nennen. Das Erlebnis des Essens ist eine Realisierung der (oder steht in der Realisierungsrelation zu den) vom Hunger bewirkten psychischen Akte(n). Auch das mögliche Erlebnis,das in der Vorstellung des Essens besteht, wollen wir in diesem theoretischen Sinn als Realisierung der gleichen Akte bezeichnen. Daß diese Realisierungsrelation wichtig ist, sieht man sofort durch Angabe von Erlebnissen, die keine Realisierungen der fraglichen Akte sind. Das Erlebnis etwa, das M. hat, wenn er eine Heino-Platte anhört, ist keine Realisierung der durch den Nahrungstrieb entstandenen Akte. Es ist einleuchtend, daß die psychologische Theorie nur Zusammenhängen zwischen solchen Erlebnissen und Akten nachgeht,bei denen die Erlebnisse Realisierungen der Akte sind. Das Modell für Herrn M. wird bezüglich der Realisierungsrelation die Angabe enthalten müssen, daß M.s Vorstellungen von Essen und schließlich seine Handlung des Essens als Erlebnisse Realisierungen der vom Nahrungstrieb hervorgerufenen psychischen Akte sind.

Schließlich können für die theoretische Beschreibung noch zwei weitere Aspekte wichtig sein: die Assoziation verschiedener Erlebnisse und die negativen Erlebnisse. Beide Aspekte sind im vorliegenden Beispiel nicht so wichtig, weil sie im allgemeinen keinen Beitrag zur Beschreibung gesunder Fälle liefern. Sie werden erst wichtig, wenn man Fälle von Krankheit erklären will. Zur Beschreibung von M. kann man einfach sagen, daß hier beide Faktoren nicht relevant sind.

Wir haben somit eine Liste von Faktoren zusammengestellt, die zusammen eine theoretische Beschreibung, ein Modell von M.s Tagesablauf unter psychologischem Aspekt ergeben. Diese Aspekte seien nochmals kurz zusammengefaßt. Das Modell für Herrn M. besteht aus folgenden Komponenten:

- einer Zeitspanne (etwa am 5.5.1977, von 7 Uhr früh bis 19 Uhr abends)
- einer Menge psychischer Akte (psychische Akte, die von M.s Nahrungstrieb, seinem Erfolgsstreben und seiner Angst vor Konkurrenz im Beruf herrühren)
- einer Menge möglicher Erlebnisse (M.s verschiedene Erlebnisse bei der Arbeit, sein Erlebnis,etwas zu essen, seine Vorstellungen, etwas zu essen)
- M.s Unbewußtem (zu den Zeitpunkten vor 15 Uhr sind nur psychische Akte vorhanden, die von M.s Erfolgsstreben und Konkurrenzangst hervorgerufen sind, nach 15 Uhr kommt ein durch den Nahrungstrieb verursachter psychischer Akt hinzu)
- M.s Bewußtsein (zu den Zeitpunkten vor 18 Uhr hat M. nur rein berufliche Erlebnisse, von 18 bis 18.30 denkt er an Essen, ab 18.30 ißt er)
- der Realisierungsrelation (die Vorstellung des Essens und das Essen selbst sind Realisierungen der durch den Nahrungstrieb hervorgerufenen Akte)

-der Assoziationsrelation und den negativen Erlebnissen (sind hier beide nicht relevant).

Diese Komponenten alleine machen aber das Modell noch nicht aus.Das Modell ist erst vollständig,wenn auch die inhaltlichen Beziehungen,die zwischen den verschiedenen Komponenten bestehen,angegeben sind.Aus den bisherigen Erläuterungen läßt sich z.B.nicht entnehmen,in welcher Beziehung M.s Realisierungsrelation zu seinem Bewußtsein steht.Sind die M. zu einem Zeitpunkt t bewußten Erlebnisse alle Realisierungen psychischer Akte? Oder kann es auch Erlebnisse geben,die keine Realisierungen sind? Die Antworten auf diese und ähnliche Fragen enthalten inhaltliche Beziehungen und werden durch die Axiome fixiert.Bevor wir uns diesen zuwenden,wollen wir noch etwas ausführlicher über die Begriffe reden.Die Wahl der Begriffe und die Festlegung ihrer "Typen" ist ein wichtiger -von vielen zu gering geachteter- Schritt in der Modellbildung.Wir werden diesen Schritt hervorheben,indem wir für die Auswahl der Begriffe ein eigenes Wort einführen.Wenn in einem konkreten Fall die verschiedenen Begriffe der Theorie spezifiziert worden sind,so heißt das Resultat,das durch Zusammenfassung entsteht,ein <u>potentielles Modell</u>.Ein potentielles Modell besteht also aus verschiedenen Komponenten,deren jede einen Zug oder eine Eigenschaft des konkreten Falles ausdrückt.Jede Komponente konkretisiert dabei einen Begriff der Theorie.Wir reden hier von potentiellen (d.h.möglichen) Modellen,weil sie sich durch Hinzufügung inhaltlicher Beziehungen (d.h.von Axiomen) zu Modellen ergänzen lassen.Als erstes Beispiel für ein potentielles Modell haben wir die obige Beschreibung der im Fall von Herrn M. wichtigen Komponenten.Wir wollen noch ein zweites Beispiel betrachten.

Luise R. wuchs ohne Mutter bei ihrem Vater auf.Ihr Vater hütete sie einerseits streng,sodaß sie außer ihm keine weitere Bezugsperson hatte.Andererseits unterdrückte er ihr gegenüber jede Gefühlsregung und verhielt sich äußerlich kalt.Wenn immer L. versuchte,mit ihm zu spielen,zu schmusen,oder auch nur ihn anzufassen,stieß sie auf Zurückweisung.L.war immer eine schlechte Schülerin und mit 16 Jahren stellten sich erste depressive Zustände ein.

Wie sieht ein potentielles Modell für diesen Fall aus? Wir müssen dazu,genau wie oben bei M.,die verschiedenen Komponenten angeben.Das potentielle Modell für L. besteht aus folgenden Komponenten:

1) der Zeitspanne von L.s erstem bis sechzehntem Lebensjahr
2) L.s psychischen Akten,darunter die üblichen,durch Triebe hervorgerufenen Akte,sowie solche,die unbewußt dem Wunsch nach Zärtlichkeit,Mitgefühl,Zuwendung und menschlicher Wärme entsprechen
3) L.s möglichen Erlebnissen,darunter die üblichen Kindheitserlebnisse.Wichtig sind hier die Erlebnisse beim Versuch,mit dem Vater in Kontakt zu kommen,ihn zu liebkosen,mit ihm zu schmusen
4) dem Unbewußten: es enthält zu verschiedenen Zeiten meist die "normalen" psychischen Akte.Wichtig sind hier die regelmäßig auftretenden Akte,die dem Bedürfnis nach Zärtlichkeit entsprechen
5) dem Bewußtsein: neben den üblichen Erlebnissen zu verschiedenen Zeiten sind hier die Erlebnisse relevant,die L. beim Umgang mit ihrem Vater hat
6) der Realisierungsrelation: die Versuche,mit dem Vater zu spielen,ihn zu küssen usw.,sowie Vorstellungen davon sind Realisierungen der psychischen Akte,die dem Wunsch nach Zärtlichkeit entspringen
7) der Assoziationsrelation: hier nicht relevant
8) den negativen Erlebnissen: dies sind die regelmäßig auftretenden Erlebnisse,in denen ihr Vater ihre Zärtlichkeit zurückweist.

(ÜI-2),(ÜI-3).Aus den verschiedenen Beispielen potentieller Modelle können wir sehen,wie ein potentielles Modell der Freudschen Theorie im allgemeinen aussieht.Wir <u>abstrahieren</u> dabei von der speziellen Beschaffenheit der Komponenten in den einzelnen Fällen und listen nur die Eigenschaften auf,die allen Beispielen gemeinsam sind.

Die erste Komponente ist stets eine Zeitspanne.Es ist zweckmäßig,hier zu unterscheiden zwischen einer Menge T von Zeitpunkten und einer $\leq$ -Relation,die die Aufeinanderfolge der Zeitpunkte beschreibt.Für $t,t' \in T$ (lies: "t und t' sind Elemente von T",also: t und t' sind Zeitpunkte) bedeutet $t \leq t'$,daß t' zeitlich später oder mit t gleichzeitig liegt.Die zweite Komponente ist stets eine Menge psychischer Akte A.Weitere Gemeinsamkeiten können hier nicht gefunden werden.Auch bei der dritten Komponente,den möglichen Erlebnissen,kann man nur sagen,daß in jedem potentiellen Modell eine Menge möglicher Erlebnisse vorkommt.Wie sie genauer aussehen,läßt sich nur im Einzelfall angeben.Die Menge der möglichen Erlebnisse bezeichnen wir mit E.

Die vierte Komponente,das Unbewußte,gibt in jedem potentiellen Modell an,welche der psychischen Akte zu den verschiedenen Zeitpunkten in der Person wirksam sind.Wir bezeichnen das Unbewußte mit U.Man kann dann sagen,daß U eine Funktion ist,die jedem Zeitpunkt die Menge der zu dem Zeitpunkt wirksamen Akte zuordnet.Wie diese Menge genau aussieht,läßt sich nur im konkreten Fall sagen.Den verschiedenen Beispielen ist nur gemeinsam,daß es sich stets um eine solche Funktion handelt.Wir verwenden die symbolische Schreibweise $f:X \rightarrow Y$, um auszudrücken,daß f eine Funktion von X nach Y ist.Das heißt,f ordnet jedem Element von X ein Element von Y als Funktionswert zu.Den Funktionswert,den f dem Element $x \in X$ zuordnet,bezeichnen wir mit f(x), x selbst heißt Argument (ÜI-4).Um U in dieser Weise abgekürzt hinschreiben zu können, müssen wir die Menge der Argumente angeben und die Menge,in der die Funktionswerte liegen.Die Argumente sind einfach Zeitpunkte,sodaß als erste Menge T zu nehmen ist.Schwieriger dagegen gestaltet sich die Wahl der zweiten Menge.Funktionswerte von U sind Mengen psychischer Akte,wir sagten, U ordnet jedem Zeitpunkt die Menge der wirksamen psychischen Akte zu.Die Funktionswerte U(t) sind also selbst schon Mengen,nämlich Teilmengen von A.Wir schreiben hierfür "$U(t) \subseteq A$" (lies: "U(t) ist eine -eventuell unechte- Teilmenge von A"). (ÜI-5).Die Menge,in der die Funktionswerte von U liegen,muß somit eine Menge von Mengen sein.Wir wählen hierfür einfach die Menge <u>aller</u> Teilmengen von A,welche mit Pot(A) (lies: "die Potenzmenge von A") bezeichnet wird (ÜI-6).Symbolisch können wir dann schreiben $U:T \rightarrow Pot(A)$,d.h.U ist eine

Funktion,die jedem Zeitpunkt eine Menge psychischer Akte zuordnet.Oder anders: das Unbewußte besteht in den zu verschiedenen Zeiten wirksamen psychischen Akten.

Analog ist die Situation beim Bewußtsein B.Wir identifizieren B mit den zu jedem Zeitpunkt gemachten Erlebnissen.B ist daher eine Funktion,die jedem Zeitpunkt eine Menge von Erlebnissen zuordnet.Wir schreiben $B:T \rightarrow Pot(E)$.

Auch über die sechste Komponente,die Realisierungsrelation, die wir mit REAL abkürzen,ist im allgemeinen wenig zu sagen. Den Beispielen ist lediglich gemeinsam,daß REAL psychische Akte und mögliche Erlebnisse einander zuordnet.Diese Zuordnung braucht nicht eindeutig zu sein.Ein psychischer Akt kann mehrere Realisierungen haben und ein Erlebnis kann die Realisierung mehrerer Akte sein.REAL ist also keine Funktion,sondern eine "echte" Relation.Wir können uns unter Berücksichtigung der Zeit REAL vorstellen als eine Liste aller Tripel von Zeitpunkten,psychischen Akten und Erlebnissen,für die das Erlebnis eine Realisierung des Aktes zum gegebenen Zeitpunkt ist.Ein solches Tripel kürzen wir ab durch <t,a,e>.Die spitzen Klammern sollen dabei andeuten,daß es darauf ankommt,welches Zeichen links oder rechts oder in der Mitte steht.Tripel sind eine Verallgemeinerung von Paaren.Im Gegensatz zur Umgangssprache,wo man etwa das "Paar",bestehend aus Frau Müller und Herrn Müller identifiziert mit dem "Paar",bestehend aus Herrn Müller und Frau Müller,ist ein Paar im technischen Sinn nach Vertauschung der sogenannten Komponenten nicht mehr dasselbe. Zum Beispiel ist <a,e> im allgemeinen verschieden von <e,a>. Man nennt solche Paare auch <u>geordnete Paare</u>,oder verallgemeinernd,wenn mehr als zwei Komponenten auftreten,<u>Tupel</u> oder <u>n-Tupel</u>,wobei n die Zahl der <u>Komponenten</u> (d.h.der im Tupel vorkommenden Symbole bei Ausnahme der Klammern und Kommas) angibt.Ein Tripel ist einfach ein 3-Tupel.REAL ist somit eine Menge (geordneter) Tripel <t,a,e>,für die $a \in A, e \in E, t \in T$ und e eine Realisierung von a zum Zeitpunkt t ist (ÜI-7).Die Menge aller Tripel <t,a,e>,für die $t \in T, a \in A$ und $e \in E$ ist, nennt man das <u>kartesische Produkt von</u> T,A <u>und</u> E,das mit $T \times A \times E$ bezeichnet wird (ÜI-8).Unter Benutzung des kartesischen Produkts können wir die Tatsache,daß REAL eine Menge von Tripeln ist, deren erste Komponenten Zeitpunkte, deren zweite Komponenten Akte und deren dritte Komponenten Erlebnisse sind (sodaß die dritte Komponente jeweils eine Realisierung der zweiten ist), nun einfach ausdrücken durch

$$REAL \subseteq T \times A \times E,$$

d.h. REAL ist eine Teilmenge des kartesischen Produktes von T, A und E.

Ähnlich behandeln wir die Assoziationsrelation. Sie gibt an, welche Paare $\langle e,e' \rangle$ von Erlebnisse assoziiert (miteinander verbunden) sind. In einem beliebigen potentiellen Modell kann diese Relation, die wir mit ASS bezeichnen, als Teilmenge von $E \times E$ angenommen werden: $ASS \subseteq E \times E$.

Schließlich bleiben noch die negativen Erlebnisse. Bei ihnen muß wieder eine Angabe zu jedem Zeitpunkt gemacht werden. Da zu einem Zeitpunkt durchaus mehrere negative Erlebnisse gemacht werden können, sind die negativen Erlebnisse, bezeichnet mit N, als eine Funktion $N:T \rightarrow Pot(E)$ gegeben.

Man kann fragen, warum wir keinen eigenen Begriff für die jeweils betrachtete Person einführen; schließlich hängt ein potentielles Modell ja ganz wesentlich von ihr ab. Der Grund ist folgender. Die Freudsche Theorie behandelt individuelle Entwicklungen, d.h. Lebensabschnitte einzelner Personen. Es kommt -zumindest bei der hier betrachteten Theorie- nicht vor, daß die psychische Entwicklung mehrerer Personen gleichzeitig in einer Weise analysiert würde, die deren gegenseitige Beeinflussung wesentlich enthielte. Daher ist jedes potentielle Modell, das irgendeinen konkreten Fall beschreibt, wesentlich auf nur eine Person bezogen. Will man die Entwicklung mehrerer Personen untersuchen, so muß man mehrere potentielle Modelle betrachten. Es ist bei einem gegebenen potentiellen Modell von vornherein klar, daß es -wenn überhaupt- die Entwicklung einer bestimmten Person beschreibt. Der Name dieser Person tut dabei nicht viel zur Sache, weshalb wir ihn gar nicht erst erwähnen.

Eine zweite Bemerkung betrifft die beiden fiktiven Fälle von M. und L. Sie sind zwar erfunden, aber so, daß man daran wichtige Aspekte der Theorie erkennen kann. Am ersten Fall erkennt man den ganz "gesunden" Ablauf,im zweiten Fall ein Muster,das bei vielen tatsächlich anzutreffenden Krankheitsbildern auftritt: die ständige und regelmäßige Wiederholung von für sich kleinen und unwichtigen negativen Erlebnissen summiert deren Wirkung.Auf die Dauer wirkt die Wiederholung genauso wie ein einziges,sehr starkes negatives Erlebnis.Dieses Muster dürfte bei bestimmten Arten von Depressionen und bestimmten Formen von Schizophrenie (Bewußtseinsspaltung) wirksam sein.

Mit Hilfe der oben eingeführten Abkürzungen läßt sich ein potentielles Modell allgemein folgendermaßen charakterisieren.

x ist ein <u>potentielles Modell der Freudschen Theorie</u> gdw (lies: "genau dann,wenn") x ein Tupel der Form

$$\langle T, E, \leq, ASS, B, N, A, U, REAL \rangle$$

ist und folgendes gilt:

1) T,A und E sind nicht-leere Mengen (von Zeitpunkten, psychischen Akten und möglichen Erlebnissen)
2) $T \cap A \cap E = \emptyset$ (siehe ÜI-9)
3) $\leq$ ist eine Ordnung auf T (siehe ÜI-10)
4) B,U und N sind Funktionen: $B: T \to Pot(E)$, $U: T \to Pot(A)$ und $N: T \to Pot(E)$
5) für alle $t \in T$: $U(t) \neq \emptyset$ und $B(t) \neq \emptyset$
6) $ASS \subseteq E \times E$ und $REAL \subseteq T \times A \times E$

Bedingung 2) besagt,daß Zeitpunkte,psychische Akte und mögliche Erlebnisse jeweils voneinander verschiedene Dinge sind.Bedingung 5) fordert,daß zu jedem Zeitpunkt sowohl unbewußte Akte in der Person wirksam sind,als auch bewußte Erlebnisse gemacht werden.Wem diese Forderung zu stark erscheint,der kann sie so interpretieren,daß sie etwas über die Wahl der Zeitpunkte aussagt.Solche Zeitpunkte,für die 5) falsch ist,werden einfach ignoriert,d.h.aus der Menge T hinausgeworfen.Bei den negativen Erlebnissen muß es dagegen zugelassen sein,daß gar keine vorhanden sind,d.h. daß $N(t)=\emptyset$ ist.

Mit M_p bezeichnen wir die Klasse aller potentiellen Modelle der Theorie,also die Klasse aller Entitäten der gerade definierten Art.Da wir später auch für andere Theorien solche

Klassen M_p betrachten werden,empfiehlt es sich,die spezielle Theorie in der Bezeichnung anzudeuten.Wir schreiben dann M_p(PSYCH).Vorläufig ist aber keine Verwechslung zu befürchten, sodaß wir bei der einfachen Bezeichnung bleiben können.Mit M_p haben wir ein erstes Beispiel einer Struktur vor uns.Das Wort Struktur ist dabei doppeldeutig.Einmal bedeutet es die allen potentiellen Modellen von M_p gemeinsame Struktur,zum anderen nennt man aber auch ein einzelnes potentielles Modell eine Struktur.Wenn von Struktur im ersten Sinn die Rede ist,also von Struktur als dem,was z.B.allen potentiellen Modellen gemeinsam ist,werden wir meist das Adjektiv "abstrakt" voranstellen.Für die strukturalistische Wissenschaftstheorie sind beide Bedeutungen gleichermaßen wichtig.Sie arbeitet sowohl abstrakte Strukturen heraus (etwa von potentiellen Modellen, oder von Modellen oder gar von verschiedenen Theorien),macht dabei aber wesentlich Gebrauch von einzelnen,konkreten Strukturen (etwa einzelnen potentiellen Modellen,einzelnen Modellen oder Theorien).Wir hoffen,durch diese Doppeldeutigkeit keine zu große Verwirrung anzurichten und werden das Wort Struktur weiter in beiden Bedeutungen verwenden.Neben dem Hinweis,daß dies ständig so gemacht wird,läßt sich noch anführen,daß zwischen beiden Bedeutungen ein enger Zusammenhang besteht.Eine verschiedenen Objekten gemeinsame abstrakte Struktur ist nämlich bestimmt durch die Klasse aller "konkreten Strukturen", denen eine -eben die zur Rede stehende- abstrakte Struktur gemeinsam ist.Umgekehrt läßt sich eine konkrete Struktur aus der Kenntnis einer abstrakten Struktur durch "Konkretisierung" gewinnen.Man muß einfach die allgemeine Charakterisierung der abstrakten Struktur mit konkretem Inhalt füllen.So kann man beispielsweise,ausgehend von obiger Definition der potentiellen Modelle durch geeignetes Ausfüllen der Komponenten mit konkretem Inhalt eine konkrete Struktur (d.h.ein potentielles Modell) gewinnen,das einen realen Fall erfaßt.

Allgemein kann man sagen,daß der Weg von konkreten Strukturen durch Abstraktion zu einer abstrakten Struktur führt und von dieser durch Konkretisierung wieder zurück zu konkreten Strukturen (ÜI-11).

MODELLE

Wir kommen nun von den potentiellen Modellen durch Hinzunahme von Axiomen zu den Modellen.Dieser Schritt läßt sich auch konkret an Beispielen vollziehen.Hat man für ein Beispiel die verschiedenen Begriffe zusammengestellt,so kann man meist auch Beziehungen zwischen den Begriffen am Beispiel "ablesen". Natürlich ist dies nicht der einzige Weg;für manche Axiome funktioniert er sogar mit Sicherheit nicht.Aber viele Axiome werden durch diese Methode plausibel gemacht.

Das erste und zentrale Axiom drückt Freuds Grundidee vom Funktionieren des psychischen Apparates aus und die Rolle,die das Unbewußte dabei spielt.Die Idee ist,daß das Unbewußte in Form psychischer Akte einen "Druck" auf die Person ausübt,der durch entsprechende Handlungen oder Erlebnisse wieder "abgelassen" wird.In unserem Vokabular klingt das weitaus spröder. Das Axiom lautet,daß jeder unbewußte psychische Akt zu einem späteren Zeitpunkt realisiert wird.Hier ist der "Druck",das "Drängen" ersetzt durch die schlichte Feststellung,daß etwas realisiert wird.Diese Formulierung ist zugegebenermaßen viel blasser,suggeriert aber nicht,wie das Bild vom Druck,daß irgendwelche meßbaren Unterschiede (z.B.Druckunterschiede) in der Theorie eine Rolle spielen.In der Tat wurden noch nie entsprechende Meßmethoden in Erwägung gezogen,sodaß wir beruhigt behaupten können,Freuds Theorie sei eine rein qualitative Theorie (d.h.eine Theorie,zu deren Formulierung man keine Zahlen braucht).Das aufgestellte Axiom dient,wie schon früher gesagt,zur Charakterisierung einer normalen Entwicklung.Es dient zur Erklärung psychischer Krankheiten nur insofern es bei diesen in irgendeiner Form verletzt ist.In unserem Beispiel eines gesunden Falles,dem Fall M.,ist das Axiom erfüllt. Die durch den Nahrungstrieb hervorgerufenen psychischen Akte werden zu einem späteren Zeitpunkt durch das Essen realisiert. In den anderen Beispielen kranker Personen ist das Axiom verletzt und genau diese Verletzung ergibt den Grund für die Krankheit.Die vom Sexualtrieb verursachten psychischen Akte werden bei der Frau mit der Agoraphobie und dem Bauernmädchen nicht realisiert.Sie werden,wie Freud sagt,verdrängt.Aber,so lautet die implizite weitere Erklärung der Fälle,diese Verdrängung muß irgendwie ausgeglichen werden und dies geschieht durch die auftretenden Krankheitssymptome.Genauso ist die Situation bei L.,wo die unbewußten psychischen Akte,die dem Drang nach Zärtlichkeit entsprechen,nicht realisiert werden. Ihre Verdrängung ist die Ursache für die Depressionen.

Neben diesem zentralen Axiom scheinen noch einige andere Axiome der Betrachtung wert.Sie dienen zum Teil einer genaueren Abgrenzung der Begriffe untereinander,zum Teil drücken sie aber auch inhaltliche Beziehungen aus,die für die Erklärung von Neurosen gebraucht werden.Die abgrenzenden Axiome besagen folgendes.

A1) Ist zum Zeitpunkt t ein Erlebnis e Realisierung des Aktes a,so ist a unbewußt und e im Bewußtsein.

Im Zusammenhang mit den potentiellen Modellen wurde gesagt, daß wir uns das Bewußte und Unbewußte als auf den gerade durchlebten Zeitpunkt eingeschränkt vorstellen.Das heißt,das Unbewußte enthält nur die gerade wirksamen psychischen Akte und das Bewußtsein nur die gerade gemachten Erlebnisse.Im Lichte dieser Vorstellung besagt A1),daß nur jeweils gerade wirkende Akte und Erlebnisse in der Realisierungsrelation stehen können.Wäre A1) nicht erfüllt,so hätte die Relativierung der Realisierungsrelation auf Zeitpunkte keinen Sinn,denn dann könnte es zu t z.B.eine Realisierung von a durch ein mögliches Erlebnis geben,die zu t nicht bewußt ist,vielleicht aber später einmal bewußt wird.Es wäre in einem solchen Fall sinnlos zu sagen,daß e den Akt a zur Zeit t realisiert.

A2) Jedes negative Erlebnis ist zum Zeitpunkt des Erlebens bewußt und jedes Erlebnis ist mit sich selbst assoziiert.

A3) Es gibt Zeitpunkte t,Akte a und Erlebnisse e,sodaß zu t a unbewußt und e bewußt sind,aber e keine Realisierung von a ist.

A3) ist die Negation der Umkehrung von A1) (ÜI-12).Würden wir auch die Umkehrung von A1) zulassen,so wäre die Realisierungsrelation REAL durch U und B mittels A1) definiert.Dann wäre jedes bewußte Erlebnis eine Realisierung jedes gerade wirksamen psychischen Aktes.Diese Konsequenz ist aber nicht erwünscht,wenn zu einem Zeitpunkt mehrere verschiedene psychische Akte wirksam sind und eventuell auch verschiedene Erlebnisse gemacht werden.

A4) Sind e und e' Realisierungen eines Aktes a (eventuell zu verschiedenen Zeiten),so sind e und e' assoziiert.

A4) bedeutet,daß die Assoziierungsrelation mindestens so "weit" wie eine durch REAL definierte"Ähnlichkeit" von Erlebnissen ist.Zwei Erlebnisse könnte man "ähnlich" nennen,wenn sie Realisierungen desselben psychischen Aktes -eventuell zu verschiedenen Zeiten- sind.Je zwei solch ähnliche Erlebnisse sind nach A4) assoziiert,aber ASS kann noch auf weitere Erlebnisse zutreffen.

A1) bis A4) haben den Charakter analytischer Aussagen,d.h. man ist geneigt,sie als richtig aufgrund der Bedeutung der in ihnen vorkommenden Begriffe anzusehen.Umgekehrt kann man auch sagen,daß sie nur zur Bedeutungsabgrenzung dienen und keinen empirischen Charakter haben.Es macht tatsächlich wenig Sinn, zu fragen,ob diese Axiome in den Beispielen erfüllt seien oder nicht.

Schließlich kommt noch ein inhaltliches Axiom.

A5) Ist das Erlebnis e zum Zeitpunkt t stark negativ,so wird jedes zu e assoziierte Erlebnis ab dem Zeitpunkt t verdrängt (ÜI-13).

Daß e' ab t verdrängt wird,heißt hier,daß e' zu allen späteren Zeitpunkten nicht bewußt ist.A5) wird nur bei Krankheitsfällen wirksam,denn nur dort gibt es negative Erlebnisse.In gesunden Fällen wird die Prämisse falsch und somit A5) trivial richtig.A5) ist bei dem Bauernmädchen und bei L. erfüllt.Das Bauernmädchen verdrängt mögliche Erlebnisse oder Vorstellungen,die mit Sexualität zu tun haben,aufgrund der Drohungen des Onkels und aufgrund des als widerwärtig empfundenen Zusehens bei dessen Geschlechtsakten.L. verdrängt mögliche Erlebnisse und Vorstellungen,die mit Zärtlichkeit und menschlichem Gefühl zu tun haben.Das stark negative Erlebnis ergibt sich bei ihr durch Summation einer ganzen Reihe gleichartiger Erlebnisse.A5) ist nur relevant für Fälle von Krankheit und drückt aus, was das Auftreten negativer Erlebnisse für Folgen auf Bewußtes und Unbewußtes hat.

Durch Zusammenfassung der bisherigen Axiome erhalten wir folgende Definition eines Modells.

x ist ein Modell der Freudschen Theorie gdw

1) $x=\langle T,E,\leq,ASS,B,N,A,U,REAL\rangle$ ist ein potentielles Modell der Freudschen Theorie
2) für alle t,a,e: wenn REAL(t,a,e), dann $a \in U(t)$ und $e \in B(t)$
3) für alle $t \in T$: $N(t) \subseteq B(t)$ und für alle $e \in E$: ASS(e,e)
4) es gibt t,a,e, sodaß: $a \in U(t)$ und $e \in B(t)$ und nicht: REAL(t,a,e)
5) für alle e,e',a,t,t': wenn REAL(t,a,e) und REAL(t',a,e'), dann ASS(e,e')
6) für alle e,e',t,t': wenn $e \in N(t)$ und ASS(e,e') und $t < t'$, dann $e' \notin B(t')$
7) für alle t und a: wenn $a \in U(t)$, dann gibt es t' und e, sodaß $t < t'$ und REAL(t',a,e)

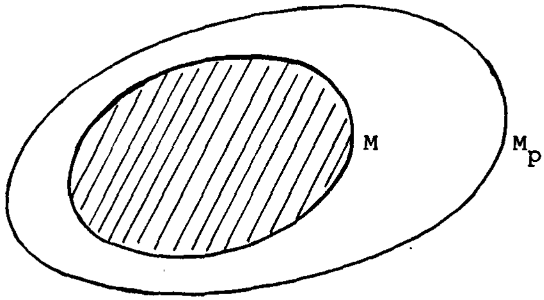
Dabei bedeutet $<$ in 6) eine Abkürzung für "$\leq$ und $\neq$" (d.h. "kleiner oder gleich und verschieden von") und $\notin$ in 6) für "ist kein Element von". Die Ausdrücke REAL(t,a,e) und ASS(e,e') sind zu lesen als "<t,a,e> stehen in der Realisierungsrelation" und "<e,e'> stehen in der Assoziationsrelation". Eine ausführlichere verbale Umschreibung lautet: "e ist eine Realisierung des Aktes a zur Zeit t" und " die Erlebnisse e und e' sind assoziiert".

Die Klasse aller Modelle bezeichnen wir mit M bzw. mit M(PSYCH). Wie bei den potentiellen Modellen repräsentiert auch M eine (abstrakte) Struktur. Einmal haben alle Modelle eine gemeinsame Struktur, denn in allen sind die Axiome erfüllt. Zum anderen ist jedes einzelne Modell eine konkrete Struktur. Wieder haben wir den Zusammenhang, daß aus konkreten Beispielen mittels Abstraktion die gemeinsame abstrakte Struktur, wie sie durch die Axiome ausgedrückt wird, zu gewinnen ist, während man Beschreibungen konkreter Fälle durch Konkretisierung der allgemeinen Struktur erhält (ÜI-14).

Zu den Modellen ist noch eine Bemerkung angebracht. Wir haben hier -bewußt- sehr grobe Modelle entwickelt, die im Hinblick auf Freuds Werk nur so etwas wie den allereinfachsten allgemeinen Fall erfassen. Es ist klar, daß sich diese Modelle (und damit die ganze hier präsentierte Theorie) in vielfacher Weise verfeinern und ergänzen lassen. Wir werden jedoch hier keinen Schritt in diese Richtung tun, sondern uns nur mit einem kurzen Hinweis auf die vielleicht naheliegendste "Erweiterung" begnügen. In Freuds Schriften findet man in Verbindung mit dieser Theorie ein Zwischenstadium zwischen dem total "gesunden" und dem echt "krankhaften" Fall, nämlich den Fall, in dem negative Erlebnisse nicht zur krankhaften Verdrängung, sondern zur Sublimierung führen. Die Person beschafft sich dabei "Ersatzrealisierungen" für psychische Akte, deren Realisierungen zu schwachen negativen Erlebnissen geführt hatten. So werden z.B. der Sexualtrieb und die von ihm hervorgerufenen psychischen Akte in der Pubertät oft in sublimierter Form realisiert, etwa durch Klavierspielen oder Schwimmen, weil der direkten Realisierung fast unüberwindliche Hindernisse entgegenstehen. Dies läßt sich in die vorliegende Theorie aufnehmen, indem man z.B. neben B und U noch eine Zwischenstufe S (für "Sublimierung") einbaut. S wäre eine Funktion $S:T \rightarrow Pot(E)$ mit $S(t) \subseteq B(t)$ für alle $t \in T$ und Axiom 6) ließe sich abschwächen, indem man in der Konklusion nur "$e' \notin B(t') \setminus S(t')$" schreibt, wobei $B(t') \setminus S(t')$ für die Differenzmenge von $B(t')$ mit $S(t')$, also die Menge aller Elemente von $B(t')$, die nicht in $S(t')$ liegen, bezeichnet. Eine hieran anschließende Änderung bzw. Hinzufügung von Axiomen überlassen wir dem Leser.

Zwischen potentiellen Modellen und Modellen besteht ein klares logisches Verhältnis: jedes Modell ist ein potentielles Modell. Die Umkehrung hiervon ist falsch (ÜI-15). Wenn wir beide Klassen von Strukturen graphisch als Kreise darstellen, erhalten wir folgende Figur.

Fig.1



M ist also Teilemnge von M_p: $M \subseteq M_p$.Man kann dazu auch sagen, daß Strukturen,die Modelle sind,weitergehend und schärfer charakterisiert sind,als Strukturen,die nur potentielle Modelle sind.Noch anders: die Forderung,daß eine Struktur ein Modell sei,ist weitergehend,als die Forderung,daß sie ein potentielles Modell sei.Eine letzte Formulierung schließlich ist die folgende.Die Axiome wählen aus der Klasse aller potentiellen Modelle eine Teilklasse,nämlich die Klasse der Modelle, aus: M wird aus M_p "ausgeschnitten".

Indem die potentiellen Modelle bestimmte Grundbegriffe auszeichnen,liefern sie den Rahmen für die Theorie.Alles,was sich mit Hilfe dieser Begriffe erfassen läßt,und nur dies,ist Gegenstand des Interesses.Insofern die Theorie keine über dieses Vokabular hinausgehenden Möglichkeiten ins Auge faßt,kann man sagen,daß M_p die Menge der für die Theorie <u>möglichen Welten</u> darstellt (ÜI-16).

Der Begriff der Neurose ist eine Art Sammelbegriff für Störungen,die durch negative Erlebnisse verursacht sind.Wir können in unserem Begriffsrahmen eine präzise Definition geben.

> Wird eine Person durch ein potentielles Modell $x = \langle T,E,\leq,ASS,B,N,A,U,REAL \rangle$ erfaßt,so hat die Person eine <u>Neurose</u> gdw es t_o und a_o gibt,sodaß
> 1) $a_o \in U(t_o)$
> 2) für alle t: wenn $t_o < t$,dann gibt es kein e mit $REAL(t,a_o,e)$

Wir sagen,daß die Person <u>ab</u> t_o <u>neurotisch bezüglich</u> a_o sei, wenn die obigen Bedingungen 1) und 2) erfüllt sind.Das heißt, ein bestimmter psychischer Akt a_o,der zur Zeit t_o im Unbewußten wirksam war,wird zu keiner späteren Zeit realisiert. Man sieht sofort,daß diese Definition fast die Negation von Axiom 6) ist (ÜI-17).Auch die Verdrängung bewußter Erlebnisse läßt sich definieren.Daß das Erlebnis e ab Zeitpunkt t <u>verdrängt</u> ist,soll einfach heißen,daß für alle t': wenn $t < t'$, dann $e \notin B(t')$.Ein verdrängtes Erlebnis kommt also zu keiner späteren Zeit wieder ins Bewußtsein.

Das Zustandekommen von Neurosen läßt sich nun zwanglos erklären.Die Lebensabläufe gesunder Personen liefern Modelle der Theorie.Nach Definition müssen in einem solchen Modell alle Axiome erfüllt sein,insbesondere Axiom 7).Das heißt,daß bei der Person,die durch das Modell erfaßt wird,jeder irgendwann einmal wirkende psychische Akt zu einer späteren Zeit realisiert wird.Krankheit entsteht,wenn aufgrund negativer Erlebnisse dieser Prozeß gestoppt wird. Die Person realisiert einen -den später für alles verantwortlichen- psychischen Akt a_o zu t_1 durch ein Erlebnis e_1,das (sehr stark) negativ ist: $REAL(t_1,a_o,e_1)$ und $e_1 \in N(t_1)$.Der starke negative Eindruck,den e_1 auf die Person macht,bewirkt eine Verdrängung dieses Erlebnisses.Der psychische Akt a_o wird nicht mehr realisiert.Die Person bekommt eine Neurose.Dies läßt sich auch formal beweisen.Wir haben folgendes

THEOREM Wird eine Person durch ein Modell $x = \langle T,E,\leqslant,ASS,B,N,A,U,REAL\rangle$ erfaßt,sind $t_o \in T$, $a_o \in A$ und gibt es e_1,sodaß $REAL(t_o,a_o,e_1)$ und $e_1 \in N(t_o)$,so ist die Person ab t_o neurotisch bezüglich a_o

(ÜI-18).Schließlich sollte man noch feststellen,daß es überhaupt Modelle gibt,d.h.daß die Axiome widerspruchsfrei sind. Wir halten fest: es gibt Modelle der Freudschen Theorie (ÜI-19).

INTENDIERTE ANWENDUNGEN

Man kann im Prinzip auf rein formalem Wege Kenntnis von Modellen der Theorie erlangen.Dazu braucht man nur die formale Definition der Modelle mengentheoretisch zu lesen und zu "verstehen".Ob eine Struktur ein Modell ist,hat zunächst nichts mit der Frage zu tun,ob diese Struktur einen realen, psychologischen Fall beschreibt.Es gibt ja rein mathematische Modelle,die keine Beschreibung menschlicher Tätigkeiten,noch weniger psychologischer Entwicklungen sind.

Freuds Theorie ist aber dem Anspruch nach eine empirische Theorie.Freud möchte mit ihr etwas über die Welt und spezieller über die psychologische Entwicklung der Menschen aussagen. Er möchte uns durch seine Theorie ein Wissen über die Welt vermitteln,das wir vorher nicht hatten.Er will uns zu neuen Einsichten über die Welt führen.Wir können an dieser Stelle noch nicht der Frage nachgehen,ob Freuds Theorie dieser Absicht gerecht wird,d.h.ob sie empirischen Gehalt hat.Dieser Frage werden wir uns später zuwenden.Es geht hier zunächst nur darum,die Theorie,oder eine Version davon,als der Form nach empirische Theorie zu beschreiben.Wir setzen voraus,daß Freuds Theorie eine empirische Theorie ist.Dies widerspricht nicht, wie wir noch sehen werden,dem eventuell auftretenden Faktum, daß die Theorie keinen empirischen Gehalt hat.Empirische Theorien,d.h.solche,die die Form empirischer Theorien haben,können durchaus empirisch gehaltlos sein.

Angenommen,wir würden Freuds Theorie identifizieren mit den beiden Strukturklassen M_p und M.Was enthielte diese Theorie an Information über die Welt? Keine,solange wir nicht sagen,was diese Strukturen erfassen.Es versteht sich ohne weitere Erläuterung,daß die Theorie nur dann etwas über die Welt aussagen kann,wenn zur Angabe von M_p und M noch mindestens eine weitere Komponente hinzutritt,in der die "Welt" oder "ein Zusammenhang zwischen Modellen und der Welt" berücksichtigt wird.Es gibt verschiedene Möglichkeiten,eine solche Komponente einzuführen und sie wissenschaftstheoretisch zu beschreiben.All diesen bisher verfolgten Möglichkeiten ist gemeinsam,daß sie relativ weit entfernt sind von der wissenschaftlichen Praxis.In dieser Situation scheint es zulässig,unter den verschiedenen Möglichkeiten die formal einfachste auszuwählen.Sie besteht darin,als weitere Komponente der Theorie eine weitere Klasse von Strukturen hinzuzunehmen: die Klasse I der intendierten Anwendungen.Diese Strukturen werden nicht rein formal charakterisiert, d.h.man kann sie nicht definieren.Die Idee ist vielmehr,daß I nur solche Strukturen enthalten soll,die Beschreibungen realer Fälle und Beispiele sind.Die Frage,inwiefern eine Theorie,die M und M_p als Modelle und potentielle Modelle hat,etwas über die Welt aussagt,wird dann folgende Antwort haben: "Insofern sie etwas über die realen Situationen,die durch Elemente von I erfaßt sind,aussagt".I dürfte also die Fälle der Frau mit der Agoraphobie und des Bauernmädchens enthalten,nicht jedoch die Fälle M.s und L.s.Anders ausgedrückt sollen nur solche Strukturen als intendierte Anwendungen zählen,die Konkretisierungen allgemeiner Strukturen sind und als solche reale Fälle erfassen.Noch anders gesagt ist I einfach die Menge der begrifflich erfaßten Beispiele von Anwendungen der Theorie.

Nehmen wir nun an,ein Element $x \in I$ sei gegeben,welches ein konkretes Beispiel erfaßt.Was hat x mit potentiellen Modellen oder Modellen zu tun? Nehmen wir an,x sei kein potentielles Modell.Das heißt,mit den Begriffen der Theorie kann man die durch x gegebene Situation nicht erfassen.In solch einer Lage ist es unplausibel,x -oder genauer: die durch x erfaßte Situation- als Beispiel für die Theorie anzusehen.Denn das mindeste,was man von den Beispielen -vor genauer Überprüfung- erwarten wird,ist,daß sie zumindest in der Begrifflichkeit der Theorie darstellbar sind.

Denken wir etwa an die Beschreibung eines Triebmörders,so ist ziemlich klar,daß dessen Tötungsrausch,der eine wesentliche Komponente der Beschreibung bilden muß,nicht mit den Begriffen unserer potentiellen Modelle definiert oder sonstwie erfaßt werden kann.Ein solches Beispiel wird sich kaum als potentielles Modell beschreiben lassen und ist daher kein geeignetes Beispiel für die hier betrachtete Version der Freudschen Theorie.

Da wir später aus anderen Gründen noch eine Modifikation der intendierten Anwendungen vornehmen werden,sei zunächst hier der eindeutigen Notation wegen die Menge der intendierten Anwendungen mit I^* bezeichnet.Die gerade angestellten Überlegungen zeigen,daß I^* sinnvollerweise eine Teilmenge von M_p sein sollte: $I^* \subseteq M_p$.Dies ist eine Forderung,keine Behauptung. Es wird gefordert,etwas nur dann als Beispiel zuzulassen,wenn es sich in der Sprache der Theorie erfassen läßt.Solange man keine klare Vorstellung davon hat,nach welchen Kriterien die Beispiele der Theorie auszuwählen sind,macht es keinen Sinn, die obige Bedingung überprüfen zu wollen: sie kann nur als Kriterium fungieren.

Die Festlegung der intendierten Anwendungen erfolgt nach der sogenannten "paradigmatischen Methode".Der Begründer einer Theorie gibt jeweils einige Beispiele explizit an.Sie bilden eine endliche,meist sehr kleine Menge I_p,die Menge der paradigmatischen (d.h.beispielhaften) intendierten Anwendungen.Daneben und im weiteren Verlauf der Entwicklung der Theorie werden zu I^* noch all jene Fälle hinzugerechnet,die denen von I_p hinreichend ähnlich sind.Die dabei benutzte Ähnlichkeitsrelation muß jedoch notwendigerweise ziemlich vage bleiben.Unterstellen wir,daß sie trotz ihrer Vagheit einer wissenschaftstheoretischen Analyse zugänglich ist und führen wir für sie die zweistellige Ähnlichkeitsrelation SIM ein (SIM(x,y) bedeutet,daß x und y sich ähnlich ("similar") sind),so haben wir schon eine Reihe von Bestimmungen für I^* zusammen.

1) $I^* \subseteq M_p$

2) es gibt I_p,sodaß gilt

2.1) $I_p \subseteq I^*$ und I_p ist endlich

2.2) zu jedem $x \in I^* \setminus I_p$ gibt es $y \in I_p$,sodaß SIM(x,y)

Dabei ist $I^* \setminus I_p$ die Differenzmenge von I^* und I_p,also die Menge der Elemente von I^*,die nicht in I_p liegen.

Bei Freuds Theorie enthält I_p im wesentlichen die Beispiele,die von Freud in seinen Schriften beschrieben sind (etwa die Agoraphobie und das Bauernmädchen).Ähnliche Fälle,also weitere intendierte Anwendungen,wird man danach beurteilen,ob sie ähnliche Krankheitssymptome oder ähnliche Vorgeschichten haben.Seit Freud wurden eine ganze Reihe von Fällen in der Literatur behandelt,von denen man oft auf Anhieb sagen wird, sie seien den Freudschen Fällen ähnlich (man vergleiche z.B. [Malan,1972]).

EMPIRISCHE BEHAUPTUNG

Mit den drei Komponenten M_p,M und I^* ist nun das Grundgerüst für eine empirische Theorie gegeben.Die wichtigste Antwort auf die Frage,was man mit einer solchen Theorie anfangen könne und warum man sich mit ihr beschäftige,lautet: man kann eine Theorie $T=\langle M_p,M,I^*\rangle$ zur Aufstellung einer empirischen Behauptung benutzen.Das Aufstellen empirischer Behauptungen ist sicher bei empirischen Theorien ein zentraler Punkt und es besteht kein Zweifel darüber,daß die Naturwissenschaften heute empirische Behauptungen liefern,die gut bestätigt sind und in der Anwendung große Erfolge erzielen.

Wie lautet die empirische Behauptung einer aus den Komponenten M_p,M und I^* bestehenden Theorie? Sie lautet:

$$I^* \subseteq M.$$

Es wird also behauptet,daß alle intendierten Anwendungen Modelle sind.Oder anders,wenn wir $I^* \subseteq M_p$ berücksichtigen: alle intendierten Beispiele erfüllen tatsächlich die Axiome der Theorie.

Bei Freuds Theorie würde die Behauptung heißen,daß in allen von Freud geschilderten (und diesen ähnlichen) Fällen die Axiome der Theorie erfüllt sind.

Hier lassen sich nun einige früher angedeutete Bemerkungen präzisieren.Erstens ist klar,daß I^* nicht präzise,etwa in Form einer Definition,beschrieben sein kann.Denn wäre I^* präzise beschrieben,so könnte man am Schreibtisch -aufgrund logischer Analyse- "ausrechnen",ob ein potentielles Modell zu I^* gehört oder nicht.Das würde aber bedeuten,daß man die empirische Behauptung $I^* \subseteq M$ am Schreibtisch überprüfen kann.Denn man braucht dazu nur alle potentiellen Modelle x durchzugehen und zu prüfen,ob $x \in I^*$ ist oder nicht und,falls $x \in I^*$,ob x ein

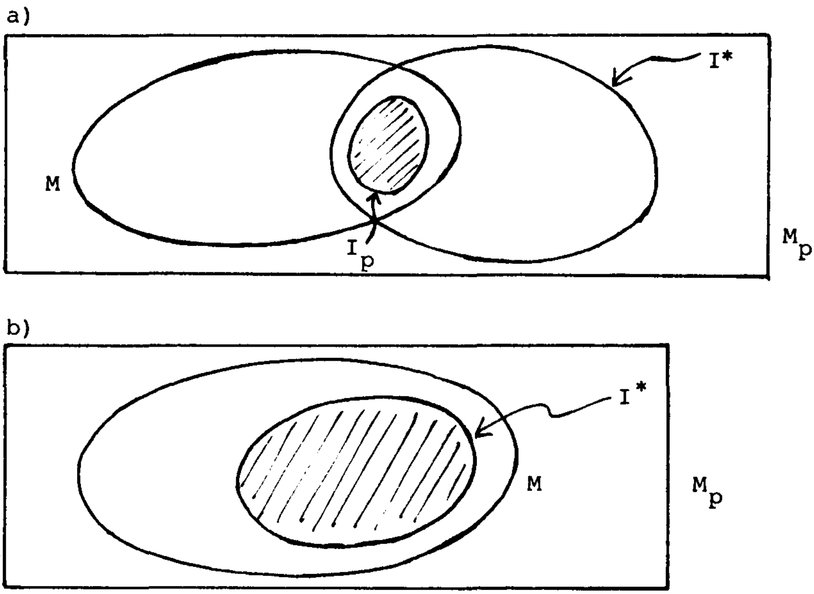
Modell ist.Da $I^* \subseteq M_p$,werden auf diese Weise tatsächlich alle intendierten Anwendungen auf ihre Zugehörigkeit zu M hin überprüft.Stellt sich heraus,daß alle $x \in I^*$ auch in M sind,so ist die empirische Behauptung richtig.Gibt es dagegen ein $x \in I^*$, welches kein Modell ist,so ist sie falsch.Unter der Voraussetzung,daß I^* präzise beschrieben ist,lassen sich alle Überprüfungsschritte rein formal durchführen (M_p und M sind ja präzise definiert) und der ganze Prozeß kann am Schreibtisch stattfinden.Man wird aber keine Theorie empirisch nennen wollen,deren empirische Behauptung man am Schreibtisch auf ihre Richtigkeit hin überprüfen kann.(Das ist nämlich gerade das Kennzeichen formaler oder mathematischer Theorien.) Das wesentliche einer empirischen Theorie besteht darin,daß die Richtigkeit ihrer empirischen Behauptung aufgrund von Erfahrungen -und nicht logischer Überlegungen- herausgefunden wird.

Zweitens enthält I^* mehr als nur die vom Begründer der Theorie angegebenen Beispiele I_p und auch mehr als nur die Menge der bisher untersuchten Beispiele.Denn bestünde I^* nur aus I_p oder den bisher untersuchten Beispielen,so wäre die empirische Behauptung,falls sie richtig ist,nicht revidierbar, d.h.die Theorie wäre,nachdem sich alle intendierten Anwendungen als Modelle herausgestellt hätten,eine "wahre" und in Zukunft nicht mehr veränderbare Theorie.Aufgrund neuer Erfahrung könnte sich keine Modifikation der empirischen Behauptung ergeben.Auch wären keine Voraussagen möglich,denn alle Beispiele wurden bereits überprüft.Auch so etwas möchte man nicht gern eine empirische Theorie nennen.Die Möglichkeit von Voraussagen und Modifikationen aufgrund von zukünftigen Erfahrungen zählen allgemein als wichtige Merkmale empirischer Theorien (ÜI-20).

Drittens kann die Ähnlichkeitsrelation SIM,die die Elemente von $I^* \setminus I_p$ mit denen von I_p verbindet,nicht präzise gemacht werden.Denn angenommen,wir könnten SIM genau definieren.Dann wäre nach Überprüfung der endlich vielen paradigmatischen Beispiele von I_p die Richtigkeit der empirischen Behauptung wieder am Schreibtisch ausrechenbar.War ein $x \in I_p$ schon kein Modell,so ist die empirische Behauptung falsch.Erwiesen sich aber alle Elemente von I_p als Modelle,so kann man sich hinsetzen und nachrechnen,ob alle (präzise definierten) Elemente von $I^* \setminus I_p$ Modelle sind oder nicht.Eine präzise Angabe von SIM führt also zum gleichen Resultat wie eine präzise Angabe von ganz I^*.Man sieht an dieser Überlegung,daß der eigentlich empirische,d.h.durch Erfahrung festzulegende Anteil an der Richtigkeit der empirischen Behauptung genau in SIM lokalisiert ist.

Aufgrund von $I^* \subseteq M_p$ läßt sich die empirische Behauptung leicht veranschaulichen.Wir zeichnen einfach I^* als Teilmenge von M_p,genau wie M,und sehen,ob I^* in M liegt oder nicht.

Fig.2



In Figur 2a) liegen Teile von I^* außerhalb von M,die empirische Behauptung ist also falsch.In Figur 2b) ist sie richtig. Man beachte,daß in a) Falschheit vorliegt,obwohl alle paradigmatischen Beispiele Modelle sind,d.h.$I_p \subseteq M$.Daß die Behauptung falsch wird,liegt hier ausschließlich an den später hinzukommenden Anwendungen von $I^* \setminus I_p$.Falls der Begründer der Theorie sehr vorsichtig war und nur Beispiele nannte,die er schon überprüft hatte,so ist in der Tat der noch zu überprüfende Teil der Behauptung die Aussage $I^* \setminus I_p \subseteq M$.

Die empirische Behauptung kommt also,um kurz zusammenzufassen,wie folgt zustande.Es werden unabhängig voneinander zwei Strukturklassen bestimmt: die intendierten Anwendungen und die Modelle.Die Modelle lassen sich präzise angeben (definieren),die intendierten Anwendungen sind paradigmatisch und ungenau bestimmt.Die Behauptung lautet dann: jede intendierte Anwendung ist ein Modell.Die Bemerkung,daß beide Komponenten voneinander unabhängig bestimmt werden müssen,scheint fast trivial.Wir betonen sie trotzdem aus zwei Gründen.Erstens wurde die Notwendigkeit,intendierte Anwendungen gesondert auszuzeichnen,erst in der jüngeren Vergangenheit erkannt und zweitens sind beide Komponenten nicht völlig unabhängig voneinander.Ein großer Teil der intendierten Anwendungen wird, wie historische Studien gezeigt haben,mit Hilfe der Modelle festgelegt.Dieses Verfahren,auch <u>Autodetermination</u> ("Selbstbestimmung") der intendierten Anwendungen durch die Theorie genannt (vergleiche [Stegmüller,1973],Abschnitt 7a),funktioniert,nachdem die paradigmatischen Anwendungen festgelegt sind,wie folgt.Man trifft auf Fälle,die den paradigmatischen Fällen in einigen Aspekten ähnlich sind,in anderen jedoch nicht,sodaß man sie nicht vorbehaltlos als intendierte Anwendungen ansehen möchte.Man läßt in diesem Fall die Theorie darüber "entscheiden",ob eine intendierte Anwendung vorliegen soll oder nicht.Das heißt,man prüft nach,ob der Fall ein Modell liefert.Wenn ja,wird er unter die intendierten Anwendungen aufgenommen,andernfalls nicht (ÜI-21).

THEORETISCHE TERME

Nachdem die empirische Behauptung der Theorie formuliert ist,in unserem Fall also die Behauptung,daß alle von Freud behandelten Fälle und diesen ähnliche Fälle Modelle der Theorie sind,wollen wir der Frage nachgehen,wie sich diese Behauptung begründen läßt.Wie können wir einen an Psychologie interessierten Mitmenschen,nachdem wir ihm die Theorie erklärt haben, davon überzeugen,daß die empirische Behauptung richtig ist? Die Antwort hierauf ist zunächst formal,da wir bei der Beschreibung der Theorie sehr präzise waren,ziemlich einfach.Es muß im Prinzip für alle -realistischerweise jedoch nur für einige überzeugende- intendierten Anwendungen nachgewiesen werden,daß sie Modelle sind.Es ist klar,daß man,wenn I^* unendlich viele Elemente hat,nicht für alle diese nachprüfen kann, ob sie Modelle sind;einfach weil man dazu unendlich lange bräuchte.Eine Allbehauptung wie die empirische Behauptung diskutiert man am besten an einem oder an einigen exemplarischen Fällen.Betrachten wir also die beiden behandelten Freudschen Beispiele (die Agoraphobie und das Bauernmädchen) und fragen wir,wie man genau herausfindet,ob diese Fälle Modelle der Theorie bilden.Die Fälle sind als intendierte Anwendungen und somit als potentielle Modelle gegeben.Wir haben konkret die verschiedenen Komponenten T,E,$\leq$,ASS,B,N,A,U,REAL angegeben und wollen nun überprüfen,ob die Axiome gelten.Gilt zum Beispiel für alle Tripel $\langle t,a,e \rangle$,daß aus REAL(t,a,e) der Satz $a \in U(t)$ gefolgert werden kann? Nehmen wir an,es sei bereits überprüft worden,daß für ein bestimmtes Tripel $\langle t,a,e \rangle$ in der Tat REAL(t,a,e) gilt.Dann muß nachgewiesen werden,daß auch $a \in U(t)$ ist.Wie soll dies geschehen?

In den bisherigen intuitiven Erläuterungen haben wir uns beim Unbewußten und bei den psychischen Akten immer durch Redewendungen wie "die durch Triebe hervorgerufenen psychischen Akte","die den Trieben entsprechenden wirksamen Akte" vor einer genaueren Formulierung gedrückt.Der Grund dafür liegt auf der Hand.Das Unbewußte und die psychischen Akte sind Dinge,über die man in der normalen deutschen Sprache nichts vernünftiges sagen kann -zumindest nicht,bevor man Freuds Theorie kennt.Die Wörter "Unbewußtes" und "psychischer Akt" kommen vor Freud nicht (oder zumindest nicht wesentlich) in der Umgangssprache vor.Sie sind vielmehr theoretische Terme, die von Freud im Zusammenhang mit seiner Theorie erstmals eingeführt wurden.Eine typische Eigenschaft theoretischer Terme ist aber,daß sie ihre Bedeutung erst im Rahmen der für sie zuständigen Theorie erlangen.Bevor man die Theorie nicht kennt und unabhängig von der Theorie haben sie entweder gar keine oder nur eine sehr unklare Bedeutung.Bei theoretischen Termen, die einfach Mengen sind (wie z.B.A) ist es unabhängig von der Theorie unklar,welche Objekte durch den Term bezeichnet werden (in der Menge A liegen).Was ist ein psychischer Akt? Nach welchen Kriterien soll man entscheiden,ob eine vorgelegte Entität ein psychischer Akt ist oder nicht? Bei theoretischen Termen komplexerer Art,also bei Relationen oder Funktionen (z.B.bei U) weiß man ohne Kenntnis der Theorie nicht,wann sie zutreffen,bzw.welche Werte sie annehmen.Wie soll man herausfinden,wie zu einer gegebenen Zeit t der Funktionswert U(t) aussieht?

Diese Überlegungen zeigen,daß schon bei dem oben beschriebenen Ansatz zur formalen Überprüfung der empirischen Behauptung zu schlampig vorgegangen wurde.Dort wurde das Problem überspielt,daß wir schon bei Beschreibung intendierter Anwendungen nicht alle Komponenten so konkret und so genau angeben können,wie es für eine Überprüfung der Axiome erforderlich wäre.Bei Freuds Theorie sind die Komponenten A,U und folglich auch REAL von dieser Art.

Um den Unterschied zu sehen,betrachten wir die anderen Komponenten: T,E,$\leq$,B und ASS.Bei T und $\leq$ gibt es offenbar keine Probleme.Zur Bestimmung von Zeitpunkten und deren Abfolge stehen in der Physik genaueste Methoden und Beschreibungsmittel zur Verfügung.Auch davon,was Erlebnisse sind,haben wir teilweise eine ziemlich genaue,alltagssprachlich formulierbare Vorstellung.Erlebnisse können nämlich einfach darin bestehen, daß in bestimmten Situationen eine Person bestimmte Wahrnehmungen hat.Die Konfiguration der Wahrnehmungen konstituiert (bildet) ein Erlebnis.Wir haben aber auch Vorstellungen und Gedanken als mögliche Erlebnisse behandelt.Nun gibt es verschiedene Formen der Vorstellung und des Denkens,die einen mehr bildlicher,die anderen mehr abstrakter Natur.Es muß zugegeben werden,daß manche dieser Formen in der Umgangssprache auch nicht sehr klar unterschieden und charakterisiert sind. Sie erhalten ihre Bedeutung vielmehr im Rahmen psychologischer Theorien.Ein wichtiger Unterschied zu den psychischen Akten ist aber,daß die psychologischen Theorien,die die Formen des Denkens und der Vorstellung klären,von der Freudschen Theorie verschieden sind.Es kann also durchaus sein,daß ein genaueres Verständnis des Wortes "Erlebnis" andere psychologische Theorien voraussetzt.Seine Bedeutung wäre dann auch über Theorien festgelegt und man könnte sagen,daß auch E ein theoretischer Term sei.Der entscheidende Punkt ist aber,daß die für E zuständige Theorie (oder die zuständigen Theorien) nicht die Freudsche Theorie ist (sind);im Gegensatz etwa zu A,dessen Bedeutung gerade von Freuds Theorie festgelegt wird.Ganz ähnlich ist es bei B.Wer versucht,eine Definition von "Bewußtsein" oder "bewußtem Erlebnis" zu geben,wird schnell sehen,daß auch diese Begriffe relativ unklar sind.Andererseits aber gibt es psychologische und auch philosophische Theorien,die den Terminus (das Wort) "Bewußtsein" zu klären versuchen.Diese Theorien sind verschieden von Freuds Theorie.Auch B ist also ein theoretischer Term,aber die für ihn zuständige Theorie,d.h.die Theorie,bezüglich derer er theoretisch ist,ist nicht die Freudsche.Der gleiche Fall liegt bei ASS vor.Auch hier gibt es psychologische Theorien,verschieden von der Freudschen,die die Assoziation zum Gegenstand haben.(Wir gehen hier nicht der Frage nach,inwieweit wir diesen Theorien Gewalt antun,wenn wir durch ASS Erlebnisse in Beziehung setzen,oder inwieweit es gerechtfertigt ist,ASS mit dem Gegenstand psychologischer Assoziationstheorien zu identifizieren.) Der einzige etwas unklare Fall ist N.Einerseits haben wir ein intuitives Gefühl dafür, wann ein Erlebnis als schrecklich und subjektiv sehr negativ empfunden wird.Andererseits gibt es derartige Erlebnisse,die für die Freudsche Theorie nicht relevant sind,z.B.gewisse Schockerlebnisse.Man kann durchaus die Meinung vertreten,daß N einen theoretischen Status hat,insofern als erst die Theorie darüber entscheidet,was als negatives Erlebnis gilt.

Wir unterscheiden somit zwischen den theoretischen Termen, die ihre Bedeutung erst im Rahmen der betrachteten Theorie erlangen und den nicht-theoretischen Termen,deren Bedeutung unabhängig von der betrachteten Theorie ist.Dabei können die nicht-theoretischen Terme wiederum bezüglich einer anderen Theorie theoretische Terme sein.Die Unterscheidung zwischen theoretischen und nicht-theoretischen Termen ist also relativiert auf eine ganz bestimmte,vorliegende Theorie T.Nur bezüglich T macht es Sinn zu fragen,ob ein Term von T theoretisch ist oder nicht.Die Unterscheidung wurde in dieser Form von J.D.Sneed vorgeschlagen (vergleiche [Sneed,1971]).Man kann sie in etwas präziserer Form auch als Kriterium für die Auszeichnung theoretischer Terme einer Theorie formulieren.Wir wollen das Kriterium am Beispiel von U erläutern.

Eine Bestimmungsmethode für U ist eine Methode,die es erlaubt,im konkreten Fall für einen gegebenen Zeitpunkt herauszufinden,welches die im Unbewußten wirksamen psychischen Akte einer Person sind.Obwohl sich über Bestimmungsmethoden vieles sagen läßt,wollen wir uns hier etwas kurz fassen,weil gerade in der Psychologie die notwendigen Beispiele fehlen.Einige Bemerkungen werden zum Verständnis des folgenden genügen.

Eine Bestimmungsmethode ist,wie schon gesagt,eine Methode (eine Regel),die man befolgen soll,um den Wert einer Modellkomponente (etwa U) zu bestimmen.Nun könnten wir zwar anfangen,über Regeln zu reden,aber das würde wenig zusammenpassen mit den bisherigen Gegenständen unseres Interesses,nämlich mit Strukturen.Um diese Unschönheit zu vermeiden,bedienen wir uns eines "Tricks",mit dessen Hilfe man von Regeln zu Strukturen übergehen kann: man identifiziert einfach eine Regel mit allen Resultaten ihrer erfolgreichen Anwendung.Wenn ich eine Regel anwende,so erhalte ich meist ein Resultat,unabhängig davon,ob die Regel nun erfolgreich (richtig) angewandt wurde oder nicht.Das Resultat der Regelanwendung ist aber ein Objekt oder eine Situation und kann meist als konkrete Struktur aufgefaßt werden.

Wir wollen uns dies -soweit möglich- am Freudschen Beispiel klar machen.Bisher hatten wir immer angenommen,daß bestimmte Triebe in der Person psychische Akte wirksam werden lassen.Wenn wir also die wirkenden Triebe bestimmen,so könnten wir vielleicht von ihnen auf die wirksamen Akte und folglich auf U(t) schließen.Aber dieser Schluß erweist sich bei näherer Betrachtung als falsch.Innerhalb der Theorie besteht zwischen Trieben und psychischen Akten kein expliziter Zusammenhang, weil die Triebe in der Theorie gar nicht vorkommen.In anderen Theorien ist es genauso,weil dort die psychischen Akte nicht vorkommen.Ein Ausweg wäre,Triebe und psychische Akte zu identifizieren.Aber auch bei Ausnutzung dieser Möglichkeit (der wir hier nicht weiter nachgehen) erhalten wir keine Bestimmungsmethode für U.Die einzige,nicht eben naheliegende Möglichkeit für eine Bestimmungsmethode für U,die dann noch übrig bleibt,ist folgende.Um U für eine konkrete Person zu bestimmen,ermittelt man zunächst die Komponenten T,$\leq$,E,B,N und ASS für diese Person.Dann setzt man voraus,daß sich die Person als Modell der Theorie erfassen läßt,daß es also A,U und REAL gibt,die zusammen mit den anderen Komponenten ein Modell bilden.Unter günstigen Umständen kann man aus diesen Voraussetzungen den gesuchten Wert U(t) erschließen (ÜI-22).Aber solche Bestimmtungsmethoden sind in klarer Weise von der Freudschen Theorie abhängig.Es wurde ja explizit vorausgesetzt,daß die Person ein Modell der Theorie bildet.

Eine praktikable Bestimmungsmethode für das Unbewußte scheint durch die Traumdeutung gegeben zu sein.Wenn sich eine Person in einer für sie schwierigen psychischen Phase befindet,so können ihre Träume manchmal einen Schlüssel zum Verständnis dieser Schwierigkeiten liefern,vorausgesetzt natürlich,daß die Person sich ihrer Träume erinnern kann (was ja normalerweise nicht der Fall ist).Gut geschulte Psychoanalytiker können zusammen mit der Person herausfinden,was die Träume bedeuten.Dabei stoßen sie manchmal auf psychische Akte,Wünsche,Triebe,Gefühle in direkter oder verschlüsselter Form,an die die Person vorher nicht bewußt dachte,die aber für die psychischen Probleme verantwortlich sind.Man wird bei hinreichend vorsichtiger Analyse sagen können,daß die so gefundenen Akte vorher unbewußt waren.Trotz einiger Vorbehalte meinen wir,daß in der Tat die Traumdeutung -eingeschränkt auf"klare" Fälle und durchgeführt von kompetenten Analytikern- eine Bestimmungsmethode für das Unbewußte ist.

Natürlich ist mit dem Wort "Deutung" noch kaum so etwas wie eine Methode beschrieben und es erweist sich als schwierig,Regeln anzugeben,die der Analytiker bei der Traumdeutung zu befolgen hat.Sicher gibt es solche Regeln,jeder Psychoanalytiker befolgt einige davon,aber man kann sie einmal nicht explizit machen und beschreiben,zum anderen gibt es wohl kaum Regeln, die in allen Fällen (bei jedem Patienten) zum Erfolg führen. Vielmehr wird man von Fall zu Fall verschiedene Regeln anwenden.

Eine strenge Auslegung des Regelbegriffs verlangt bei Bestimmungsmethoden,daß die Anwendung der Regel zu einem eindeutigen Ergebnis führt.Zum Beispiel müßte bei dieser strengen Auslegung die Traumdeutung für alle Elemente des Traumes eindeutig herausfinden,ob sie zum Unbewußten gehören oder nicht.Es scheint aber,als ob in der Psychologie eine solch strenge Auffassung unrealistisch wäre.

Wenden wir nun den erwähnten Trick an und identifizieren wir die (sowieso nicht bekannten) Regeln der Traumdeutung mit allen Resultaten von erfolgreich durchgeführten Deutungen.Eine erfolgreiche Traumdeutung liefert relevante,unbewußte psychische Akte.Als Resultat einer erfolgreichen Deutung erhalten wir also gerade einen Funktionswert der Funktion U,die das Unbewußte einer Person erfaßt.

Eine Bestimmungsmethode wie etwa die gerade beschriebene heiße abhängig von der Freudschen Theorie,wenn man zu ihrer erfolgreichen Durchführung voraussetzen muß,daß die untersuchte Person ein Modell der Theorie bildet.Mit anderen Worten: die Situation,in der U(t) gemäß fraglicher Methode bestimmt wird,liefert ein Modell der Theorie.Die Existenz solch theorienabhängiger Bestimmungsmethoden wurde für Sneed zum Ausgangspunkt bei der Formulierung eines Theoretizitätskriteriums,d.h.eines Kriteriums,mittels dessen man die Terme einer Theorie in theoretische und nicht-theoretische einteilen kann.

Nun haben wir nicht gesagt,was Terme einer Theorie überhaupt sind;bisher wurde immer nur über Komponenten von Modellen oder potentiellen Modellen geredet.Ein Term ist der ursprünglichen Bedeutung des Wortes nach zunächst einmal ein sprachliches Objekt,z.B.der formale Ausdruck "f(a)" oder das Wort "Masse".Da wir aber nicht vorhaben,eine Sprache explizit ins Spiel zu bringen -und zwar nicht nur,weil das alles verkompliziert,sondern weil es gerade ein Vorteil des strukturalistischen Ansatzes ist,sich nicht explizit auf eine bestimmte Sprache beziehen zu müssen- ,behelfen wir uns mit einer "nicht-sprachlichen" Variante und definieren "Term" wie folgt.

Ist M_p eine Klasse potentieller Modelle und hat jedes $x \in M_p$ die Form $x=\langle t_1,..,t_n\rangle$ (für eine feste natürliche

Zahl n), so heißt für jedes j ($1 \leq j \leq n$)

$$\bar{t}_j := \{t_j / \exists t_1 \ldots \exists t_{j-1} \exists t_{j+1} \ldots \exists t_n (\langle t_1, \ldots, t_{j-1}, t_j, t_{j+1}, \ldots, t_n \rangle \in M_p)\}$$

ein Term (von M_p).

Der Doppelpunkt links vom Gleichheitszeichen soll dabei andeuten, daß der links vom Gleichheitszeichen stehende Ausdruck (also der auf der Seite des Doppelpunktes) definiert wird, während der auf der anderen Seite stehende Ausdruck zur Definition verwandt wird und als bekannt und wohlverstanden vorausgesetzt wird. Ausdrücke der Form $\{x/\ldots x \ldots\}$ sind zu lesen als "die Menge all derjenigen x, für die ...x... gilt", wobei ...x... irgendeine Aussagen über x ist. "$\exists$" ist der Existenzquantor, sodaß der ganze Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen zu lesen ist als "die Menge aller t_j, für die gilt: es gibt t_1 und...und es gibt t_{j-1} und es gibt t_{j+1} und...und es gibt t_n, sodaß $\langle t_1, \ldots, t_{j-1}, t_j, t_{j+1}, \ldots, t_n \rangle \in M_p$".

Intuitiv ist ein Term von M_p einfach die Zusammenfassung aller Komponenten einer bestimmten Art (d.h. der Komponenten, die in den potentiellen Modellen an einer bestimmten, etwa der j-ten Stelle stehen), die in den potentiellen Modellen vorkommen. Wer aus der Logik mit dem Begriff der Interpretation vertraut ist, kann sich unter $\bar{t}_j$ die Klasse aller Interpretationen eines bestimmten Grundzeichens einer zugrundeliegenden Sprache vorstellen. Nach dieser Definition gibt es zu einer Klasse M_p potentieller Modelle gerade so viele Terme, wie die einzelnen potentiellen Modelle Komponenten haben. Bei der Freudschen Theorie haben wir z.B. neun Terme, weil die potentiellen Modelle hier neun Komponenten haben. Wir bezeichnen die einzelnen Terme meist mit den gleichen Namen, mit denen bisher über die entsprechenden Komponenten geredet wurde. Zum Beispiel verwenden wir statt "$\bar{t}_5$" einfach "Bewußtsein" oder auch "B". Verwechslungen zwischen Termen und Komponenten sind dann zwar möglich, aber aus dem jeweiligen Kontext heraus ist immer klar, was gerade gemeint ist.

Aufgrund unserer Definition von "Term" ist klar, was man unter einem Element eines Terms zu verstehen hat, nämlich eine

Komponente aus einem potentiellen Modell x,und zwar eine,die in x an der richtigen Stelle steht.Ein Element des Terms "Bewußtsein" ist einfach eine Komponente B eines potentiellen Modells.

Das Sneedsche Theoretizitätskriterium lautet nun -speziell für den Term $\bar{t}_8$ (das "Unbewußte" oder einfach "U") formuliert- wie folgt.

> U ist theoretisch in der Freudschen Theorie,wenn für jedes Element von U jede Bestimmungsmethode ein Modell der Freudschen Theorie liefert,d.h.wenn bei Durchführung der Methode immer ein konkretes Modell realisiert bzw.hergestellt wird.

Die Verallgemeinerung auf beliebige Theorien T mit potentiellen Modellen M_p und beliebige Terme $\bar{t}$ von M_p liegt auf der Hand.

> Term $\bar{t}$ ist theoretisch in T,wenn jede Bestimmungsmethode für jedes Element von $\bar{t}$ ein Modell von T liefert.

Es ist nicht leicht herauszufinden,ob ein Term tatsächlich theoretisch ist.Denn nach dem Kriterium muß man alle Bestimmungsmethoden untersuchen und dazu zunächst einmal alle kennen.Wenn aber eine Theorie einen theoretischen Term in diesem Sinn enthält,dann ergibt sich für die Überprüfung der empirischen Behauptung ein grundsätzliches Problem: die Überprüfung wird zirkulär oder führt zu einem unendlichen Regreß.Der Zirkel oder der Regreß entstehen wie folgt.Um die empirische Behauptung $I^* \subseteq M$ zu überprüfen,beginnen wir,für irgendeine Anwendung $x \in I^*$ nachzuprüfen,ob $x \in M$ ist.Dazu müssen die Komponenten von x bestimmt werden.

Eine der Komponenten von x kann aber nur mit theorieabhängigen Bestimmungsmethoden bestimmt werden.Wir wollen diese Komponente "theoretisch" nennen (ÜI-23).Bestimmt man diese theoretische Komponente mit einer solchen theorieabhängigen Methode,so liefert aber nach Definition von "abhängig" die Bestimmung schon ein Modell,etwa x_1 (d.h.der Vorgang der Bestimmung bildet ein Modell x_1).Unter der Voraussetzung,daß $x_1 \in M$, kann man daher die fragliche Komponente von x bestimmen und zu einer Überprüfung der Aussage "$x \in M$" benutzen.Es handelt sich dann aber um eine "bedingte" Überprüfung,denn sie hängt von der Voraussetzung ab,daß $x_1 \in M$.Wollen wir zu einer "unbedingten" Prüfung kommen,so müssen wir auch die Aussage "$x_1 \in M$" überprüfen.Denn nur wenn "$x_1 \in M$" überprüft und bestätigt wurde,kann man bei positivem Ergebnis der Überprüfung von "$x \in M$" von einer (unbedingten) Bestätigung reden,bzw.bei negativem Ergebnis von einer (unbedingten) Widerlegung.

Die Überprüfung von "$x_1 \in M$" ist aber nun ein Prozeß genau der gleichen Art wie die von "$x \in M$".Wieder kommt in x_1 eine theoretische Komponente vor,die nur in theorieabhängiger Weise bestimmt werden kann und wieder setzt deren Bestimmung voraus, daß das bei Anwendung einer geeigneten Methode erhaltene Resultat,etwa ein System x_2,ein Modell der Theorie ist: $x_2 \in M$. Die Überprüfung von "$x_1 \in M$" ist also wieder nur bedingt möglich,nämlich unter der Bedingung,daß "$x_2 \in M$" schon gilt.Es ist aufgrund unserer Definition von "abhängiger Bestimmungsmethode" klar,daß sich diese Betrachtung beliebig weiterführen läßt, sodaß man eine Folge $x, x_1, x_2, x_3, \ldots$ von Systemen erhält,die alle überprüft werden müssen,wenn man "$x \in M$" bestätigen (oder auch widerlegen) will.Dabei können,zumindest logisch gesehen, zwei Fälle auftreten.Einmal kann das jeweils nächste Folgenglied stets von seinem Vorgänger und von allen "früheren" Vorgängern verschieden sein.Dann spricht man von "unendlichem Regreß",weil stets auf ein neues,anderes System zurückgegriffen oder zurückgegangen wird.Im anderen Fall bricht die Folge irgendwo (etwa bei x_i) ab,indem die nachfolgende Struktur x_{i+1} mit x_i oder einem x_j mit $j < i$ identisch ist.Die Bestimmung der "kritischen" theoretischen Komponente von x_{i+1} erfolgt dann nicht durch Rückgriff auf ein "neues" System x_{i+2},sondern durch Bestimmung der anderen Komponenten von x_{i+1}.Dieser Fall liegt z.B.vor,wenn die "kritische" Komponente von x_{i+1} durch die restlichen Komponenten von x_{i+1} und die Annahme,daß $x_{i+1} \in M$,eindeutig bestimmt ist.Man spricht dann von einem Zirkel,denn die Überprüfung von "$x_{i+1} \in M$" stützt sich auf die Voraussetzung,daß "$x_{i+1} \in M$" bereits gilt.Die Analyse von Beispielen in naturwissenschaftlichen Theorien zeigt,daß in der

Regel der zweite Fall vorliegt.

Damit haben wir das sogenannte Problem der theoretischen Terme:

> Wenn es in einer Theorie theoretische Terme im oben definierten Sinn gibt,dann führt der Test einer empirischen Behauptung der Form $I^* \subseteq M$ zu einem Zirkel oder Regreß.

Mit andere Worten: die empirische Behauptung ist dann gar nicht überprüfbar.

Dies entspricht nicht gerade unseren Idealvorstellungen von empirischen Theorien.Wir werden also versuchen,diesem Problem zu entgehen.Dazu bieten sich zwei Auswege an.Erstens versucht man,die Existenz theoretischer Terme zu leugnen.Man muß dazu für jeden Term der Theorie Bestimmungsmethoden finden,die die Theorie nicht voraussetzen.Bemühungen in dieser Richtung,die bei physikalischen Theorien unternommen wurden,waren allerdings bisher nicht erfolgreich.Einmal als theoretisch angesetzte Terme erwiesen sich in erstaunlich hartnäckiger Weise als resistent gegen theorienunabhängige Bestimmungsmethoden. Trotzdem können wir diesen ersten Ausweg nicht einfach als unmöglich abtun.Er ist nach wie vor offen,erwies sich nur bisher als wenig erfolgreich.Der zweite Ausweg,den wir hier generell verfolgen werden,besteht darin,die empirische Behauptung zu modifizieren.Die Zirkularität wird durch die Bestimmung der theoretischen Komponenten von Anwendungen $x \in I^*$ in Gang gesetzt.Wenn wir die empirische Behauptung so formulieren,daß eine Bestimmung solcher theoretischer Komponenten nicht mehr nötig ist,verschwindet das Problem.Wie soll das geschehen? Ganz einfach,wir werfen die theoretischen Komponenten aus den intendierten Anwendungen hinaus.Die intendierten Anwendungen sind dann keine potentiellen Modelle mehr,sondern nur noch "Fragmente" potentieller Modelle.Sie entstehen aus potentiellen Modellen,indem man deren theoretische Komponenten wegläßt. Solch ein partielles potentielles Modell (oder einfach: ein partielles Modell) hat bei der Freudschen Theorie die Form

$$\langle T,E,\leq,ASS,B,N\rangle,$$

wobei wir etwas willkürlich N als nicht-theoretisch ansehen. Wie läßt sich aber dann eine empirische Behauptung formulieren? Auch ganz einfach:

> Zu <T,E,≤,ASS,B,N> gibt es A,U und REAL,sodaß <T,E,≤,ASS,B,N,A,U,REAL> ein Modell ist.

Und dies soll für alle Anwendungsfragmente gelten.Bezeichnen wir mit I die Menge aller nicht-theoretischen Fragmente von Elementen von I^* (ÜI-24) und nennen wir die Elemente von I ebenfalls intendierte Anwendungen,so lautet die neue empirische Behauptung:

> Jede intendierte Anwendung $x \in I$ läßt sich zu einem Modell ergänzen.

"Ergänzen" bedeutet dabei,daß man geeignete Komponenten finden kann,oder genauer,daß es geeignete Komponenten gibt,die,zu den Komponenten von x hinzu genommen,ein Modell bilden.Um eine Behauptung dieser Art zu überprüfen,braucht man keine theoretischen Komponenten mehr zu bestimmen.Denn in den "partiellen" intendierten Anwendungen kommen diese ja gar nicht mehr vor. Die Überprüfung läuft nun folgendermaßen.Für ein $x \in I$ werden die einzelnen Komponenten von x mittels geeigneter Bestimmungsmethoden ermittelt.Da alle Komponenten von x nicht-theoretisch sind,hängen diese Bestimmungsmethoden nicht von der Gültigkeit der Theorie ab.Sind die Komponenten von x bestimmt, so prüft man,ob es theoretische Komponenten gibt,die x zu einem Modell ergänzen.Diese Prüfung erfordert kein Experiment, sie kann am Schreibtisch erfolgen.Die Bestimmung der theoretischen Komponenten für Elemente von I^*,die das Problem der theoretischen Terme erzeugt,wird somit umgewandelt in reine Rechenarbeit.In der neuen empirischen Behauptung sind die theoretischen Terme durch Existenzquantoren gebunden und brauchen deshalb nicht mehr am konkreten Fall praktisch ermittelt zu werden.Diese existenzquantifizierte Form der empirischen Behauptung geht auf F.P.Ramsey zurück und wird auch als "Ramsey-Satz" bezeichnet.

Wir wollen den Vorgang der Aufstellung eines Ramsey-Satzes noch einmal etwas systematischer wiederholen.Im ersten Schritt sind die Terme der Theorie in zwei disjunkte Klassen einzuteilen: die Klasse der theoretischen Terme und die Klasse der nicht-theoretischen Terme.Dies sind bei uns $\{A,U,REAL\}$ und $\{T,E,\leq,ASS,B,N\}$.Im zweiten Schritt werden partielle Modelle definiert als Strukturen,die aus potentiellen Modellen durch Weglassung der theoretischen Komponenten entstehen.Die Klasse aller partiellen Modelle der Theorie bezeichnen wir mit M_{pp}. Es ist also:

$$M_{pp}=\{\langle T,E,\leq,ASS,B,N\rangle / \exists A \exists U \exists REAL(\langle T,E,\leq,ASS,B,N,A,U,REAL\rangle \in M_p\}.$$

Im dritten Schritt wird gefordert,daß die intendierten Anwendungen nicht,wie bisher,potentielle,sondern nur noch partielle Modelle sein sollen: $I\subseteq M_{pp}$.Im vierten Schritt schließlich wird die empirische Behauptung definiert als die Aussage, daß sich jede intendierte Anwendung durch Hinzufügung theoretischer Komponenten zu einem Modell ergänzen läßt.Diese Aussage läßt sich symbolisch durch

$$I\subseteq \bar{r}(M)$$

abkürzen,wobei $\bar{r}(M)$ die Menge aller Redukte von Modellen bezeichnet.Die Reduktbildung,d.h.die Weglassung theoretischer Komponenten,stellen wir durch eine Funktion $r:M_p \rightarrow M_{pp}$ dar,die jedem potentiellen Modell das durch Streichung der theoretischen Komponenten entstehende partielle Modell zuordnet (ÜI-25).

Die Zahl der Komponenten der Theorie hat sich durch diese Lösung des Problems der theoretischen Terme erhöht.Es ist neu hinzugekommen die Unterscheidung zwischen theoretischen und nicht-theoretischen Termen,oder äquivalent,die Einführung partieller Modelle.Es ist klar,daß die Angabe einer homogenen Klasse von Teilstrukturen potentieller Modelle mit der Unterscheidung von theoretischen und nicht-theoretischen Termen gleichwertig ist.Wenn man M_p und M_{pp} kennt,dann sind die theoretischen Terme genau die,deren Elemente nicht in den Strukturen von M_{pp} auftreten.

Die Freudsche Theorie hat nunmehr die Form

$$T=\langle M_p,M,M_{pp},I\rangle,$$

wobei $I \subseteq M_{pp}$ ist.Alle vier Komponenten sind Klassen von Strukturen,die ersten drei Komponenten repräsentieren darüberhinaus auch je eine abstrakte Struktur.

Wir fragen nun,ob die empirische Behauptung $I \subseteq \bar{r}(M)$ wahr ist.Bei Theorien im allgemeinen hängt die Wahrheit der empirischen Behauptung von den speziellen Elementen von I ab.Für ein bestimmtes I_1 kann $I_1 \subseteq \bar{r}(M)$ richtig sein,wenn man dagegen I_1 durch eine andere Menge I_2 ersetzt,so könnte die Behauptung falsch werden,d.h.es könnte dann gelten: nicht $I_2 \subseteq \bar{r}(M)$.

Man kann aber in einigen Fällen die Wahrheit der empirischen Behauptung herausfinden,ohne I genauer zu kennen.Diese Situation kommt folgendermaßen zustande.Definitionsgemäß ist $I \subseteq M_{pp}$.Wenn es gelingt,für jede beliebige Teilmenge Y von M_{pp} den Wahrheitswert der Aussage $Y \subseteq \bar{r}(M)$ auf rein logische Weise zu ermitteln,dann können wir ihn speziell auch für Y=I herausfinden.Hier sind wiederum zwei Fälle besonders einfach.Einmal kann nämlich gelten,daß $Y \subseteq \bar{r}(M)$ für alle $Y \subseteq M_{pp}$ richtig ist. Zum anderen kann diese Aussage für alle $Y \subseteq M_{pp}$ falsch sein. In diesen beiden Extremfällen brauchen wir offenbar I nicht mehr zu kennen,um die Wahrheit bzw.Falschheit der empirischen Behauptung nachzuweisen.Im ersten Fall sagen wir,die Theorie habe keinen absoluten empirischen Gehalt,im zweiten Fall,sie sei widerspruchsvoll.Denn wenn $Y \subseteq \bar{r}(M)$ für alle $Y \subseteq M_{pp}$ gilt, dann spielt die Abgrenzung der intendierten Anwendungen durch Erfahrung für die Richtigkeit der empirischen Behauptung offenbar keine Rolle.Keine mögliche Erfahrung (repräsentiert durch ein $Y \subseteq M_{pp}$) ist imstande,die Wahrheit der Behauptung zu revidieren.Die Bezeichnung im zweiten Fall beruht auf dem für viele Logiksysteme geltenden Vollständigkeitssatz,nach dem eine Theorie genau dann widerspruchsfrei ist,wenn sie ein Modell besitzt.Man zeigt leicht,daß bei Voraussetzung eines solchen Logiksystems gilt: die Theorie ist widerspruchsfrei genau dann,wenn sie nicht widerspruchsvoll im obigen Sinn ist (ÜI-26).

Es stellt sich nun heraus,daß die Unterscheidung zwischen Theorien,die keinen absoluten empirischen Gehalt haben und solchen,die ihn haben,nicht sehr interessant ist.Denn jede Theorie,die im nicht-theoretischen Vokabular formulierte

Axiome enthält,hat absoluten empirischen Gehalt.Dies folgt aus der Tatsache,daß unter den potentiellen und damit auch unter den partiellen Modellen immer Strukturen vorkommen,für die die nicht-theoretischen Axiome falsch sind (ÜI-27).Fast alle Theorien enthalten aber Axiome,die im nicht-theoretischen Vokabular formuliert sind.Auch die Freudsche Theorie hat absoluten empirischen Gehalt (siehe das folgende Theorem,Teil a).Das liegt einfach daran,daß die Axiome 3) und 6) in der Definition der Modelle keine theoretischen Terme enthalten.Ohne auf theoretische Terme zurückgreifen zu müssen,schließen daher die Modelle schon bestimmte potentielle und damit auch partielle Modelle aus,nämlich solche,in denen 3) und 6) falsch sind.

Es gibt noch eine zweite,interessantere Möglichkeit,empirisch gehaltlose von gehaltvollen Theorien zu unterscheiden. Und die gerade angestellten Überlegungen zeigen auch,wo diese Unterscheidung festzumachen ist.Intuitiv wird man sagen,daß eine Theorie keinen relativen Gehalt hat,wenn die theoretischen Terme und die mit ihnen formulierten Axiome keinen Beitrag zum absoluten empirischen Gehalt liefern.Das heißt,wenn durch Benutzung theoretischer Terme keine Möglichkeiten ausgeschlossen werden,die nicht schon ohne theoretische Terme ausgeschlossen sind.Genauer können wir den relativen empirischen Gehalt wie folgt charakterisieren.Wir teilen die Axiome der Theorie in zwei Klassen: die Klasse der nicht-theoretischen Axiome,in denen keine theoretischen Terme auftreten,sowie den Rest,die Klasse der theoretischen Axiome,in denen mindestens je ein theoretischer Term auftritt.Mit M^{o}_{pp} bezeichnen wir die Klasse aller partiellen Modelle,in denen alle nicht-theoretischen Axiome erfüllt sind.Daß T <u>keinen relativen empirischen Gehalt</u> hat,wird nun definiert durch die Festlegung,daß jede Teilmenge Y von M^{o}_{pp} auch Teilmenge von $\bar{r}(M)$ ist.Man kann dann sagen,daß relativ zu den als gültig vorausgesetzten nicht-theoretischen Axiomen die theoretischen Axiome keine weiteren Sachverhalte ausschließen.Alle Mengen partieller Modelle,die den nicht-theoretischen Axiomen genügen,lassen sich auch zu Mengen von Modellen ergänzen (ÜI-28).

Es ist hier zu bemerken,daß damit eine erste Unterscheidung vorliegt,die wesentlich von der speziellen sprachlichen Form der Theorie abhängt.Man hat oft "eine" Theorie,die sich auf verschiedene,jedoch äquivalente Weise sprachlich formulieren läßt.Dabei kann es vorkommen,daß das,was die nicht-theoretischen Axiome beinhalten,beim Übergang zu einer anderen Formulierung logisch stärker oder schwächer wird.Es könnte also sein,daß eine Formulierung der Theorie (relativen) empirischen Gehalt hat,während dies für eine andere Formulierung nicht der Fall ist.

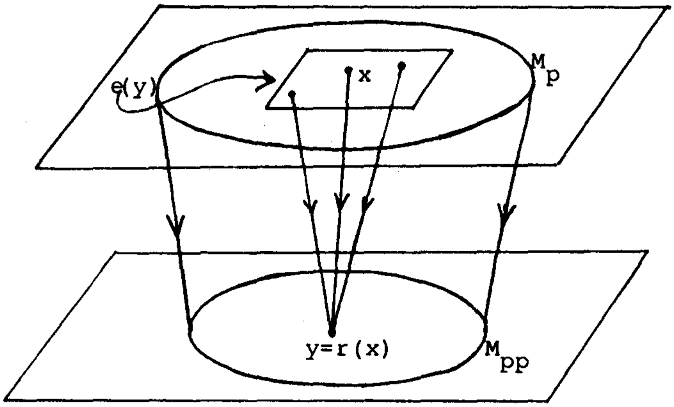
Beispiele für Theorien,die keinen relativen empirischen Gehalt haben,finden sich unter den Paradefällen erfolgreicher empirischer Theorien: klassische Mechanik,klassische Gleichgewichtsthermodynamik,spezielle Relativitätstheorie und Mikroökonomie.Erschien es zunächst etwas befremdlich,empirische Theorien zu betrachten,die keinen relativen empirischen Gehalt haben,so scheint dies angesichts der Liste durchaus angebracht.Da man in der Wissenschaftstheorie auch solche Theorien als empirisch bezeichnen möchte,die in Standard-Lehrbüchern durch Angabe von Axiomen charakterisiert sind,ist es angebracht,den Begriff einer empirischen Theorie so weit zu fassen,daß er auch relativ gehaltlose Theorien umfaßt.Zwar könnte man auch anders vorgehen,müßte dann aber einer Reihe von Theorien,die gemeinhin als Standard-Beispiele für empirische Theorien gelten,die Eigenschaft "empirisch" absprechen.Erwartungsgemäß erweisen sich nicht alle empirischen Theorien als relativ empirisch gehaltlos und es gibt auch einen intuitiven und plausiblen Weg,um eine gehaltlose Theorie zu einer gehaltvollen zu verschärfen: man muß einfach weitere geeignete Axiome hinzufügen.

Wie steht es nun konkret mit der Freudschen Theorie? Wir beweisen dazu folgendes Theorem.

THEOREM
a) Die Freudsche Theorie hat absoluten empirischen Gehalt,d.h.nicht für alle $Y \subseteq M_{pp}$ gilt: $Y \subseteq \bar{r}(M)$
b) Die Freudsche Theorie hat keinen relativen empirischen Gehalt,d.h.für alle $Y \subseteq M^{o}_{pp}$ gilt $Y \subseteq \bar{r}(M)$.

Zum Beweis siehe (ÜI-27) und (ÜI-28).Um dieses Resultat zu diskutieren,verschaffen wir uns zuerst eine anschauliche Vorstellung.Wir zeichnen dazu die partiellen Modelle und die potentiellen Modelle als Kreise auf zwei verschiedenen Ebenen, der (oberen) theoretischen und der (unteren) nicht-theoretischen Ebene (Figur 3).

Fig.3



Jedes potentielle Modell $x \in M_p$ wird durch Weglassung der theoretischen Komponenten zu einem partiellen Modell r(x).Dies ist durch die Pfeile von oben nach unten angedeutet.Dabei können verschiedene potentielle Modelle das gleiche nicht-theoretische Redukt haben.In Figur 3) ist die Klasse aller potentiellen Modelle,die $y \in M_{pp}$ als Redukt haben,eingezeichnet und mit e(y) bezeichnet (lies: "die Menge der theoretischen Ergänzungen von y").Man beweist,daß die verschiedenen Mengen theoretischer Ergänzungen eine Klasseneinteilung von M_p bilden.Zwei potentielle Modelle,die das gleiche Redukt haben,sind also in natürlicher Weise äquivalent (gleichwertig) (ÜI-29).In Figur 4) ist nun M als Teilmenge von M_p eingezeichnet.Die Menge der nicht-theoretischen Redukte von M,$\bar{r}(M)$,bildet eine Teilmenge von M_{pp}.Andererseits ist auch $I \subseteq M_{pp}$.Die empirische Behauptung wird nun wahr oder falsch,je nachdem,ob I in $\bar{r}(M)$ enthalten ist oder nicht.In Figur 4) ist die Behauptung falsch,in Figur 5) richtig.

Fig.4

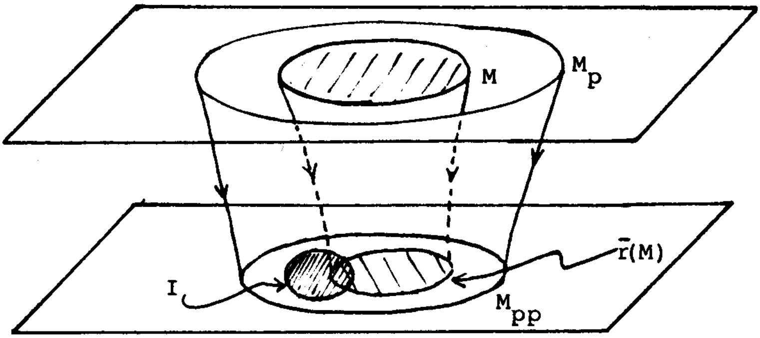
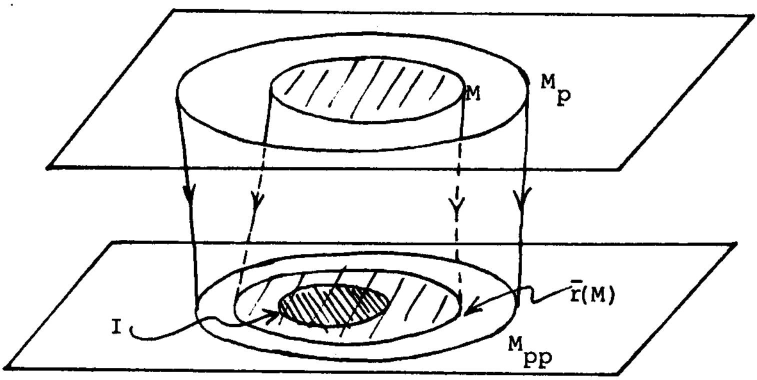


Fig.5



Analog zu unseren früheren Betrachtungen können wir weiterhin sagen,daß die Axiome (durch die Modelle) aus einer Klasse von Möglichkeiten eine bestimmte Teilklasse aussondern.Die Klasse der Möglichkeiten ist hier gerade M_{pp}.Wir können uns M_{pp} vorstellen als die Klasse aller nicht-theoretisch erfaßbaren <u>möglichen Welten</u> für die Theorie.Alles und genau das,was im nicht-theoretischen Vokabular erfaßbar ist,gehört zu M_{pp}.M wählt aus M_{pp} eine Teilklasse,nämlich $\bar{r}(M)$ aus,welche mit der "Erfahrung" in Form von I konfrontiert wird.Bei absolut empirisch gehaltlosen Theorien ist $\bar{r}(M)=M_{pp}$,während bei widerspruchsvollen Theorien $\bar{r}(M)=\emptyset$ ist.

Der oben angedeutete Weg,eine gehaltlose Theorie mit Gehalt zu versehen,besteht darin,weitere theoretische Axiome -d.h. Axiome,die theoretische Terme enthalten- hinzuzufügen.Von diesen Axiomen wird man nicht erwarten,daß sie auf alle intendierten Anwendungen zutreffen.Sie werden so speziell sein,daß sie nur noch in einer Teilmenge von I gültig sind.Die durch Hinzufügung neuer Axiome und der Einschränkung des Bereichs intendierter Anwendungen entstehende neue Theorie nennen wir eine <u>Spezialisierung</u> der ursprünglichen (vergleiche auch Kap. II).Gibt es Spezialisierungen der Freudschen Theorie,die relativen empirischen Gehalt haben.Die Frage läuft im wesentlichen darauf hinaus,ob es einschränkende Bedingungen an U und REAL gibt,sodaß nicht zu allen partiellen Modellen von M^{o}_{pp} theoretische Ergänzungen existieren,die diese Forderungen erfüllen.Rein formal gesehen existieren solche Bedingungen (ÜI-30).Ob sich unter den formal möglichen aber auch inhaltlich plausible und für Psychologen interessante finden,ist eine Frage,die innerhalb der Psychologie zu klären sein wird. Wir können hierzu im Moment weiter nichts sagen,sondern nur darauf verweisen,daß von dieser Frage letztlich Erfolg oder Mißerfolg der Theorie abhängen wird.

Unabhängig davon wollen wir eine Spezialisierung betrachten,die bereits kurz angesprochen wurde und durch die die Theorie eine erheblich größere Zahl von Anwendungsfällen bekommt.Es handelt sich dabei um Fälle,in denen an die Stelle eines oder weniger starker,negativer Erlebnisse eine große Zahl schwacher negativer Erlebnisse tritt.Diese Möglichkeit ist zwar formal in unserer Formulierung der Theorie enthalten, dabei aber von anderen Möglichkeiten nicht explizit abgehoben. Die angestrebte Spezialisierung erfolgt durch weitere Festlegungen in Form von Axiomen,welche nur noch in den angegebenen Anwendungsfällen erfüllt sind,in denen die Person eine große Zahl relativ schwacher,aber ähnlicher negativer Erlebnisse hat.Als Beispiel hierfür denken wir an den konstruierten Fall der Luise R.,bei der die ständige,d.h.oftmalige Verweigerung von Zärtlichkeit seitens der einzigen "Bezugsperson" zu Depressionen führte.

Als Zusatzaxiom braucht man hierfür den folgenden, etwas komplizierten Satz:

Es gibt $ÄHN \subseteq E \times E$ und es gibt $\langle t_1, a_1, e_1\rangle, \ldots, \langle t_n, a_n, e_n\rangle \in T \times A \times E$, sodaß

1) für alle $e, e' \in E$: $\langle e, e\rangle \in ÄHN$ und (wenn $\langle e, e'\rangle \in ÄHN$, dann $\langle e', e\rangle \in ÄHN$)
2) für alle $i \leq n$: $REAL(t_i, a_i, e_i)$
3) $t_1 < \ldots < t_n$
4) $N = \{e_1, \ldots, e_n\}$
5) für alle $e, e' \in N$: $\langle e, e'\rangle \in ÄHN$
6) $a_1 = \ldots = a_n$

Es wird also gefordert, daß es eine Ähnlichkeitsrelation ÄHN zwischen Erlebnissen gibt und eine endliche Folge von Tripeln $\langle t_1, a_1, e_1\rangle, \ldots, \langle t_n, a_n, e_n\rangle$, sodaß diese Tripel zeitlich nacheinander (Bedingung 3) die Realisierungsrelation erfüllen (Bedingung 2). Im wesentlichen kommt es dabei auf die Folge der nacheinander realisierten Erlebnisse $e_1, \ldots, e_n$ an. Alle und nur diese sind negativ (Bedingung 4) und einander ähnlich (Bedingung 5). Weiter scheint es plausibel, daß alle Erlebnisse Realisierungen des gleichen psychischen Aktes sind (Bedingung 6).

Wenn dieses Axiom erfüllt ist, macht die Person eine Folge negativer und einander ähnlicher Erlebnisse durch, die alle Realisierungen eines psychischen Aktes sind. Man kann sagen, daß all diese Erlebnisse nach ein und demselben Muster ablaufen. Für hinreichend großes n (etwa n=20 oder mehr) können diese ständig wiederholten negativen Erlebnisse, auch wenn jedes einzelne von ihnen nur schwach ist und für sich genommen harmlos wäre, den gleichen Effekt, nämlich eine Neurose hervorrufen, wie ein einziges sehr starkes negatives Erlebnis. Der Erklärungsmechanismus für Neurosen belibt dabei ähnlich dem früher beschriebenen. Wir sagen, die Person sei <u>ab</u> t_n bezüglich a_1 $(=a_2=\ldots=a_n)$ <u>neurotisch</u>, wenn

1) für alle $i \leq n$: $a_1 \in U(t_i)$ und
2) für alle $t \in T$: wenn $t_n < t$, dann gibt es kein $e \in E$ mit

$$REAL(t, a_1, e)$$

Der Akt a_1 wird also bei einer neurotischen Person ab dem Zeitpunkt t_n, dem n negative Realisierungen dieses Aktes vorausgingen, nicht mehr realisiert, d.h. er wird verdrängt.

QUERVERBINDUNGEN

Bei den meisten Theorien spielen neben den durch die Axiome ausgedrückten Beziehungen auch noch inhaltliche Beziehungen zwischen verschiedenen Modellen eine Rolle: wir nennen sie deshalb Querverbindungen. In naturwissenschaftlichen Theorien werden sie meist nicht explizit erwähnt. Trotzdem spielen sie in der Praxis eine zentrale Rolle. Der Grund für ihre Vernachlässigung liegt darin, daß viele Wissenschaftler die metaphysische Ansicht vertreten, ihre Theorie habe eigentlich nur ein universelles Modell, d.h. ein Modell, welches das ganze Universum umfaßt. Und wenn es nur ein Modell gibt, ist es natürlich sinnlos, nach Querverbindungen zwischen verschiedenen Modellen zu suchen.

Es gibt vielleicht mehrere Arten von Querverbindungen, aber hier steht zunächst nur eine Art zur Diskussion. Intuitiv handelt es sich um Querverbindungen, die dadurch zustande kommen, daß verschiedene Modelle gleiche Objekte enthalten. Um diese Idee zu verstehen, muß man zunächst sagen, was man mit Objekten meint. Die Objekte einer Theorie sind einfach die Elemente, die in den Grundmengen der Modelle vorkommen. Und Grundmengen sind solche Komponenten von Modellen, die keine Relationen und Funktionen sind, also einfach nur Mengen. Die Grundmengen in Modellen der Freudschen Theorie sind durch diese Bestimmung klar ausgezeichnet: T, E, A und N. Die Objekte der Freudschen Theorie sind also Zeitpunkte, mögliche Erlebnisse und psychische Akte.

Wie kann es passieren, daß ein Objekt in verschiedenen Modellen vorkommt? Bei Zeitpunkten ist dies klar. Es gibt einfach verschiedene Personen, die zur gleichen Zeit leben. Die verschiedenen Modelle, die diese verschiedenen Personen erfassen, enthalten folglich gleiche Zeitpunkte. Dabei brauchen nicht alle Zeitpunkte von z.B. zwei Modellen identisch zu sein.Eine Querverbindung besteht z.B.schon,wenn mindestens ein Zeitpunkt in beiden Modellen der gleiche ist.Dieser Fall bedeutet,daß die eine Person erstmals zu einem Zeitpunkt betrachtet wird, bei dem die Analyse der anderen Person gerade zu Ende geht.

Schwieriger als bei Zeitpunkten ist die Situation bei den möglichen Erlebnissen.Damit ein Erlebnis in zwei verschiedenen Modellen vorkommt,müssen zwei verschiedene Personen dieses Erlebnis haben.Können zwei Personen das gleiche Erlebnis haben? Diese Frage ist,wenn man über sie nachdenkt,einfach vage.Wir haben bis jetzt keine guten Identitätskriterien für Erlebnisse,sodaß die Antwort "ja" oder "nein" weniger eine empirische Feststellung als eine Feststellung über den Gebrauch des Wortes"Erlebnis" sein wird.Beantworten wir die Frage mit "nein", so verstehen wir Erlebnisse als mit einer wesentlich subjektiven Komponente versehen.Verschiedene Personen können nicht das gleiche Erlebnis haben,einfach weil "ein Erlebnis haben" eigentlich genauer heißt "als eine ganz bestimmte Person ein Erlebnis haben".Beantworten wir die Frage dagegen mit "ja",so unterstellen wir,daß man Erlebnisse einer Person beschreiben kann,ohne die individuelle Beschaffenheit dieser Person zu berücksichtigen.Zumindest für Erlebnisse,die aus relativ einfachen Wahrnehmungen bestehen,scheint eine solche Auffassung plausibel.Das Erlebnis ist dann wesentlich davon abhängig,welche "Daten" von außen auf die Person einwirken und von den individuellen Unterschieden bei der Verarbeitung der "Daten" zu "Wahrnehmungen" kann abgesehen werden.Es scheint kein gewaltsamer Eingriff zu sein,den Erlebnisbegriff für die Freudsche Theorie in der zweiten Art zu verstehen.

Am schwierigsten ist die Frage bei den psychischen Akten. Da sie eine theoretische Komponente bilden,haben wir weder über die Umgangssprache,noch über "direkte Beobachtung" die Möglichkeit,etwas über sie auszusagen.Daß in verschiedenen Personen der gleiche psychische Akt wirksam ist, -d.h.daß er in zwei Modellen vorkommt- ist für sich genommen eine ziemlich unklare Feststellung.

Querverbindungen bestehen darin,daß ein Objekt in verschiedenen Modellen "gleiche Eigenschaften" hat,d.h.in gleicher Weise in Beziehung zu anderen Objekten steht bzw.gleiche "innere" Eigenschaften hat,die ihm unabhängig davon zukommen, mit welchen anderen Objekten das fragliche Objekt in Beziehung steht.Gehen wir in dieser Richtung die verschiedenen Möglichkeiten durch,so ergibt sich folgendes Bild.Bei B,N und U würde eine mögliche Querverbindung besagen,daß zwei Personen zur gleichen Zeit immer das gleiche Bewußtsein,gleiches Unbewußtes und gleiche negative Erlebnisse haben.Alle drei Möglichkeiten sind jedoch offenbar falsch.Die Tatsache allein, daß zwei Personen zum gleichen Zeitpunkt betrachtet werden, gibt keinen Anlaß,den Personen psychische Gemeinsamkeiten zuzuschreiben.Man beachte,um Mißverständnissen vorzubeugen,daß Personen keine geeigneten Objekte sind (jedenfalls nicht in der vorliegenden Theorie),die in verschiedenen Modellen vorkommen können.Eine Querverbindung des Inhalts,daß eine Person in allen Modellen,in denen sie vorkommt,die gleichen psychischen Eigenschaften hat,können wir in unserem Vorkabular,so plausibel sie auch klingt,überhaupt nicht formulieren.

Es bleiben noch mögliche Querverbindungen für REAL und ASS. Im Fall von REAL würde die Aussage,die die Querverbindung ausdrückt,wie folgt lauten.Kommt ein Tripel $\langle t,a,e \rangle$ in zwei verschiedenen Modellen x und x' vor,so ist e in beiden Modellen gleichermaßen eine Realisierung von a zu t.Wenn x die bisherige Form hat und die Komponenten von x' jeweils mit einem Strich versehen werden,so läßt sich dies symbolisch wie folgt ausdrücken.

$$\text{Wenn } \langle t,a,e \rangle \in (T \cap T') \times (A \cap A') \times (E \cap E'), \text{dann:}$$
$$REAL(t,a,e) \leftrightarrow REAL'(t,a,e)$$

Auch eine derartige Querverbindung wird im allgemeinen nicht vorliegen.Man hat zwar die Vorstellung,daß das,was für eine Person als Realisierung eines Aktes zählt,auch für eine andere Person eine Realisierung darstellen könnte.Aber die obige Aussage ist schärfer.Sie bezieht sich bei beiden Personen auf den gleichen Zeitpunkt.Für gleiche Zeitpunkte ist die Aussage aber im allgemeinen falsch,weil wir REAL so verstehen,daß es sich nur auf wirksame Akte bezieht.

Es bleibt schließlich noch ASS.Hier nun scheint eine sinnvolle Querverbindung formulierbar zu sein.Sie besagt,daß zwei von zwei Personen gemachte Erlebnisse von der einen Person genau dann miteinander assoziiert werden,wenn sie auch von der anderen Person assoziiert werden.Sicher kann man auch hier Vorbehalte anmelden.Aber die Aussage ist nicht in einem so offensichtlichen Maße falsch,wie es bei den zuvor untersuchten Möglichkeiten der Fall war.Wenn Erlebnisse keine starke subjektive Komponente haben,warum soll dann nicht auch der Assoziationsmechanismus bei verschiedenen Personen gleich oder zumindest ähnlich sein?

Lassen wir unsere Skrupel beiseite und versuchen wir,diese Querverbindung in die Theorie einzubauen.Die Aussage über das Vorliegen der Querverbindung stellt eine Beziehung zwischen zwei Modellen oder genauer: zwischen zwei potentiellen Modellen fest.Sie lautet,daß zwei potentielle Modelle x und x', in deren Erlebnismengen E und E' zwei Erlebnisse e und e_1 gemeinsam vorkommen,sich auch bezüglich ihrer Assoziationsrelationen ASS und ASS' -zumindest für die beiden ausgezeichneten Erlebnisse- nicht unterscheiden.Die Querverbindung drückt also eine Beziehung zwischen je zwei potentiellen Modellen aus.Da sich die Gültigkeit dieser Beziehung aus logischen Gründen auch auf endliche Mengen potentieller Modelle überträgt und da,zumindest formal,sogar unendliche Klassen potentieller Modelle bildbar sind,können wir die Querverbindung von vornherein für beliebige Kombinationen potentieller Modelle formulieren.Es werden dann nur solche Kombinationen potentieller Modelle zugelassen,in denen die Querverbindung besteht.Wir definieren:

> In $X \subseteq M_p$ besteht die <u>Querverbindung</u> gdw für alle
> $x = \langle T,E,\leq,ASS,B,N,A,U,REAL\rangle$ und alle
> $x' = \langle T',E',\leq',ASS',B',N',A',U',REAL'\rangle$ und für alle
> e,e_1 gilt: wenn $e,e_1 \in E \cap E'$,dann $(ASS(e,e_1) \leftrightarrow ASS'(e,e_1))$

Sammeln wir alle Mengen X,in denen die Querverbindung besteht, in eine Menge Q,so gilt $Q \subseteq Pot(M_p)$.Wir nennen Q auch wieder Querverbindung.

Man kann nun Q als weitere Komponente zur Theorie hinzunehmen, sodaß die Theorie schließlich die Form

$$T=\langle M_p, M, M_{pp}, Q, I\rangle$$

hat. Die ersten vier Komponenten, die alle präzise definiert sind, fassen wir zusammen zu dem formalen Kern

$$K=\langle M_p, M, M_{pp}, Q\rangle$$

der Theorie. T läßt sich dann schreiben als Paar

$$T=\langle K, I\rangle,$$

bestehend aus dem formalen Kern K und der Menge I der intendierten Anwendungen.

Auch die empirische Behauptung läßt sich schließlich durch Bezugnahme auf Querverbindungen weiter verschärfen. Zu der bisherigen Behauptung $I \subseteq \bar{r}(M)$ tritt intuitiv noch die Forderung hinzu, daß die intendierten Anwendungen, bzw. deren theoretische Ergänzungen, den Querverbindungen genügen. Um diese Forderung sinnvoll mit der bisherigen Behauptung verbinden zu können, müssen wir die ganze Behauptung neu formulieren. Die empirische Behauptung lautet dann:

Es gibt $X \subseteq M$, sodaß $\bar{r}(X)=I$ und $X \in Q$.

Es wird also behauptet, daß sich die intendierten Anwendungen so durch theoretische Komponenten ergänzen lassen, daß die entstehende Menge X $(\bar{r}(X)=I)$ eine Modellmenge ist und in ihr die Querverbindung besteht. Etwas allgemeiner können wir für den Kern $K=\langle M_p, M, M_{pp}, Q\rangle$ die Klasse A(K) definieren als

$$A(K):=\{Y/Y \subseteq M_{pp} \text{ und es gibt } X, \text{ sodaß } X \subseteq M, \bar{r}(X)=Y \text{ und } X \in Q\}$$

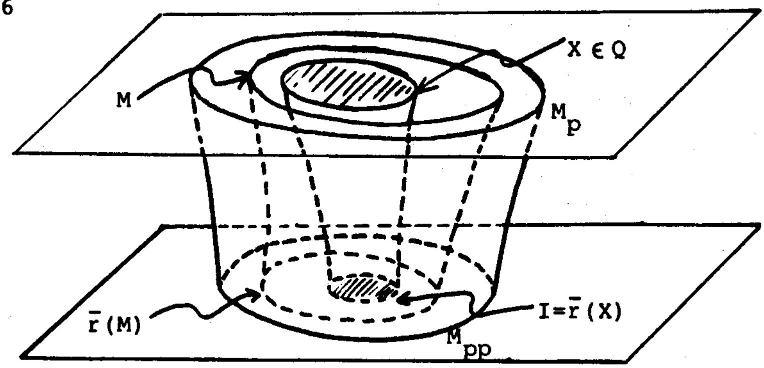
A(K) stellt eine Auswahl aus der Potenzmenge von M_{pp} dar, d.h. $A(K) \subseteq Pot(M_{pp})$. A(K) enthält nur solche Teilmengen von M_{pp}, die durch M und Q "zugelassen" sind. Wiederum können wir $Pot(M_{pp})$ als "alle möglichen Kombinationen", die in der Sprache der Theorie beschreibbar sind, auffassen. Der formale Kern K wählt aus all diesen Möglichkeiten solche aus, die von der Theorie zugelassen sind. Die obige empirische Behauptung läßt sich nun auch schreiben als

$$I \in A(K)$$

Sie ist richtig, je nachdem ob die unabhängig von K beschriebene Menge I in der von K ausgewählten Teilmenge von Pot(M_{pp}), eben in A(K), liegt.

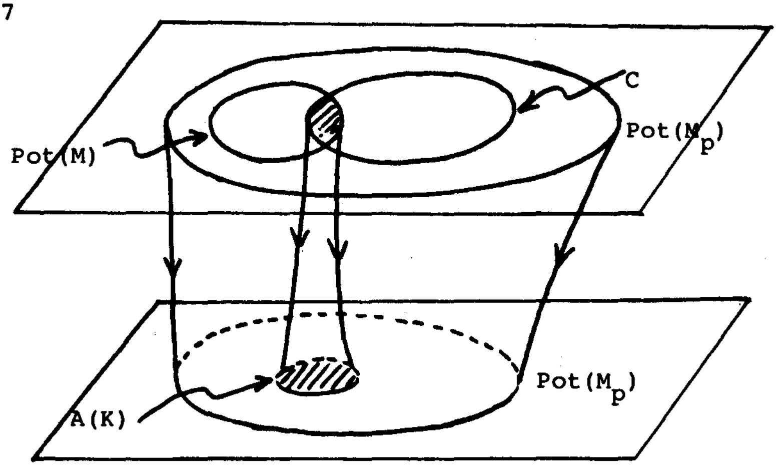
In Figur 6) ist auf der theoretischen (oberen) Ebene ein Element X von Q, d.h. eine erlaubte Kombination, eingezeichnet. Soll dies die Menge X aus einer "wahren" empirischen Behauptung sein, so muß die Reduktmenge von X gerade I ergeben und X muß Teilmenge von M sein (ÜI-31).

Fig.6



In Figur 7) ist der Sachverhalt auf der Ebene der Potenzmengen dargestellt. A(K) enthält als Teilmenge von Pot(M_{pp}) genau die Elemente, die Redukte (nunmehr Redukte zweiter Ordnung) von Modellmengen, die zugleich in Q liegen, sind.

Fig.7



ÜBUNGEN ZU KAPITEL I

(ÜI-1): Stelle eine Liste der Begriffe auf,die in den im Text beschriebenen Fällen wesentlich vorkommen (es gibt mehrere Listen).

(ÜI-2): Gib ein potentielles Modell an für die Frau mit der Agoraphobie.

(ÜI-3): Gib ein potentielles Modell für das Bauernmädchen an.

(ÜI-4): (1) $f:X \rightarrow Y$ sei eine Funktion,die jedem Tag einer Woche die Menge der von einer bestimmten Person an diesem Tag gegessenen,verschiedenen Nahrungsmittelsorten zuordnet,z.B.habe die Person am Mittwoch Brot,Eier,Butter,Salz,Tomaten,Zwiebeln, Essig,Öl und Schnitzel gegessen.

a) Gib eine geeignete Menge von Argumenten an (die Menge X der...).

b) Gib eine geeignete Menge an,von der die Funktionswerte

Elemente sind (die Menge der...).

c) Beschreibe eine solche Funktion f nach eigener Erfindung durch Auflistung aller Angaben der Form $f(x)=y$ mit $x \in X$. ($f(x)=y$ soll heißen, daß dem Argument x der Funktionswert y zugeordnet ist.)

(2) Finde drei Eigenschaften, die den beiden folgenden Funktionen f und g gemeinsam sind:

$$f:[0,1] \to \mathbb{R} \quad , f(x)=x^2$$
$$g:[0,2] \to \mathbb{R} \quad , g(x)=x^3$$

(dabei ist $[0,1]$ das abgeschlossene Intervall reeller Zahlen zwischen 0 und 1, also $\{y/y \in \mathbb{R}$ und $0 \leq y \leq 1\}$.)

(ÜI-5): (1) $X \subset Y$ soll bedeuten, daß X eine echte Teilmenge von Y ist. Welche Aussage muß man beweisen, um $X \subset Y$ zu beweisen? (Die Aussage soll sich auf die Elemente von X und Y beziehen.)

(2) $X \subseteq Y$ soll heißen, daß X eine echte Teilmenge von Y ist, oder daß X und Y gleich sind. Welche Aussage muß man beweisen, um $X \subseteq Y$ zu beweisen?

(3) Überprüfe die Lösung von Teil (1). Die Lösungen von (1) und (2) müssen verschieden sein.

(4) Sei X die Menge der geraden natürlichen Zahlen, Y die Menge reeller Zahlen größer als 10. Zeige: "$X \subseteq Y$ oder $Y \subseteq X$" ist falsch.

(5) Gilt für die Menge X der Nilpferde und Y der Paarhufer: $X \subseteq Y$ oder $X \subset Y$ oder keines von beiden?

(ÜI-6): (1) Bilde die Menge aller Teilmengen der Menge $\{a,b,c\}$, also die Menge $\{X/X \subseteq \{a,b,c\}\}$.

(2) $\emptyset$ bezeichne die leere Menge, d.h. die Menge, die überhaupt keine Elemente hat. Ist $\emptyset$ ein Element von Pot($\{a,b,c\}$)? (vergleiche ÜI-5-(2))

(3) Hat Pot(X) mehr Elemente als X?

(4) Wann hat Pot(X) endlich viele Elemente, wann unendlich viele?

(ÜI-7): M. realisiert in der Zeitspanne von 7 bis 19 Uhr ($T=\{7,8,...,19\}$) folgende Akte: um 9 Uhr Akte, die vom

Aggressionstrieb herrühren,durch Streit mit einem Kollegen;um 11 Uhr Akte von "Erfolgsstreben" durch Lob von seinem Chef;um 13 Akte der Angst durch Lektüre einer Zeitungsartikels über die Wirtschaftslage;um 17 Uhr Akte,die vom Nahrungstrieb kommen,durch Vorstellung eines Abendessens;um 19 Uhr die gleichen Akte durch Einnahme des Abendessens.Weitere Realisierungen treten nicht auf.

(1) Bilde eine geeignete Menge A und eine Menge E und führe Abkürzungen $a_1,a_2,\ldots;e_1,e_2,\ldots$ für deren Elemente ein.

(2) Stelle eine Liste aller Tripel $\langle t,a,e\rangle$ auf,für die bei M. zu t e eine Realisierung von a ist.

(3) Was läßt sich über ein Tripel $\langle t,a,e\rangle$ sagen,für das $t\in T$, $a\in A$ und $e\in E$ ist,das aber nicht in der Liste von (2) vorkommt?

(4) Beweise: Die genaue Kenntnis von M.s REAL-Relation ist äquivalent mit der Kenntnis der Liste aus (2).(Was heißt, REAL zu kennen?)

(ÜI-8): (1) Es sei X die Menge aller Paare natürlicher Zahlen $\langle x,y\rangle$,für die gilt: $y=x^2$ und Y die Menge aller Paare natürlicher Zahlen $\langle x,y\rangle$ mit $x\leq y$.Formalisiere die Beschreibungen beider Mengen und beweise $X\subseteq Y$.

(2) Beweise unter Voraussetzung des Satzes "Für alle n gilt: $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle=\langle y_1,\ldots,y_n\rangle \leftrightarrow (x_1=y_1\wedge \ldots \wedge x_n=y_n)$" die Aussage: "$\langle a_1,a_2,a_3,a_4\rangle\neq\langle a_1,a_2,a_4,a_3\rangle$". Es sei $b:=\sqrt[3]{27}$ und c die kleinste ungerade Primzahl.Beweise: $\langle a,b\rangle=\langle a,c\rangle$.

(3) Welche Form haben die Elemente von $T\times Pot(E)$?

(4) Welche Aussage muß man beweisen,um X=Y zu beweisen (die Aussage soll über die Elemente von X und Y reden) ?

(5) Gilt allgemein: $(X\times Y)\times Z=X\times(Y\times Z)$?

(6) Formuliere eine Konvention (Festlegung),die es ermöglicht, bei kartesischen Produkten von mehr als zwei Mengen die Klammern wegzulassen.

(ÜI-9): Für Mengen X und Y wird $X\cap Y$,der Durchschnitt von X und Y,definiert als $\{x/x\in X \text{ und } x\in Y\}$.

(1) Verallgemeinere die Definition auf n Mengen $X_1,\ldots,X_n$ $(n>2)$

(2) Beweise: $(X_1\cap X_2)\cap X_3=X_1\cap(X_2\cap X_3)$ und $X\cap Y=Y\cap X$

(vergleiche ÜI-8-(4)).
(3) Gib eine sprachliche Formulierung für "$T \cap A \cap E = \emptyset$".
(4) Schreibe die Axiome für eine Boolesche Algebra hin und beweise,daß die mengentheoretischen Operationen $\cap$, $\cup$ (Vereinigung) und $\complement$ (Komplement) diese Axiome erfüllen.(Benutze ein Lehrbuch über Mengenlehre oder Logik oder ein Lexikon der Mathematik.)

(ÜI-10): Die Axiome für eine Ordnung $\leq$ auf einer Menge X lauten: für alle $x,y,z \in X$:

1) $x \leq x$ (Reflexivität)
2) $x \leq y$ oder $y \leq x$ (Konnexität)
3) wenn $x \leq y$ und $y \leq z$,dann $x \leq z$ (Transitivität).

(1) Zeige: Die Relation "ist später als oder gleichzeitig" ist eine Ordnung auf der Menge der Zeitpunkte.
(2) Gib ein Beispiel für eine Ordnung auf einer Menge X,für die folgende Aussage falsch wird:

Zu je zwei $x,x' \in X$ mit $x \neq x'$ gibt es ein $y \in X$ mit $x \leq y$ und $y \leq x'$ und $x \neq y \neq x'$.

(3) Wenn $\leq$ die obigen Axiome erfüllt und $<$ definiert wird durch

$$x < y \text{ gdw } (x \leq y \text{ und } x \neq y),$$

erfüllt dann auch $<$ diese Axiome?

(ÜI-11): Wir betrachten eine Klasse von 10 Schülern $S_1,\ldots,S_{10}$, bezüglich deren Körpergröße folgende Verhältnisse vorliegen mögen (dabei bedeute $S_i = S_j$ (bzw. $S_i < S_j$),daß S_i genauso groß (bzw.kleiner) ist wie (als) S_j):

$$S_1 < S_3 < S_2 = S_4 = S_{10} < S_5 = S_9 < S_7 = S_6 = S_5.$$

(1) Beschreibe die Größenverhältnisse in der Klasse als konkrete Struktur mittels der Wörter "Schüler","ist gleich groß wie" und "ist kleiner als" und formalisiere.
(2) Abstrahiere (sieh ab von) bei der Struktur in (1) von der inhaltlichen Bedeutung der Grundwörter und gib die so erhaltene abstrakte Struktur an.(Die Angabe soll zwischen beliebigen Dingen Beziehungen "des Typs" von "ist gleich groß" und "ist kleiner als" charakterisieren.) Wie könnte man die

entstehende abstrakte Struktur nennen?
(3) Gib eine Konkretisierung der abstrakten Struktur in (2) an,die statt über Schüler über Meßergebnisse eines naturwissenschaftlichen Experiments (etwa zur Massenmessung) redet. Was ist bei (1) und (3) gleich und was verschieden?

(ÜI-12): Formalisiere A1) und A3) im Text und beweise,daß durch Vertauschung von Prämisse und Konklusion des Wenn-dann-Teilsatzes in A1) und anschließende Negation ein mit A3) äquivalenter Satz entsteht.

(ÜI-13): Formuliere die im Text angegebenen Axiome mit Hilfe der früher eingeführten Abkürzungen.

(ÜI-14): Erfinde und beschreibe ein konkretes Modell,d.h.gib eine konkrete Struktur an,die aus der im Text beschriebenen abstrakten Struktur der Modelle durch Konkretisierung hervorgeht.

(ÜI-15): Gib ein spezielles mathematisches potentielles Modell an,das kein Modell ist.

(ÜI-16): Erfinde einen konkreten psychologischen Fall,in dem Axiom 7) der Definition der Modelle nicht gilt.

(ÜI-17): Wie muß man die Definition einer Neurose verändern, damit gilt: Person p hat eine Neurose gdw (nicht 7)) mit Aussage 7) aus der Definition der Modelle?

(ÜI-18): Beweise das Theorem im Text. (Man nimmt an,die Person sei nicht ab t_o bezüglich a_o neurotisch,d.h.es gibt ein e, sodaß REAL(t,a_o,e) mit $t_o < t$ gilt.Mit 5),6) und 2) erhält man einen Widerspruch,nämlich,daß $e \in B(t)$ und $e \notin B(t)$.)

(ÜI-19): (1) Gib ein mathematisches Modell an.
(2) Gib ein mathematisches Modell an,in dem es t_o,a und e_1 gibt,sodaß: REAL(t_o,a_o,e_1) und $e_1 \in N(t_o)$.

(ÜI-20): Versuche zu definieren: "A ist eine Voraussage in der Freudschen Theorie".Dbei soll A eine Aussage sein,in der außer logischen und mengentheoretischen Begriffen nur Grundbegriffe der Theorie vorkommen.

(ÜI-21): Wir definieren Klassen M_p,M,I^* von Strukturen wie folgt:

$M_p := \{\langle N,\sim\rangle$ /N ist eine Menge und $\sim\, \subseteq (N \times N)\}$
$M := \{\langle N,\sim\rangle$ /N ist eine Menge und $\sim\, \subseteq (N \times N)$ und $\forall\, x,y,z \in N$
$(x \sim y \wedge y \sim z \rightarrow x \sim z)\}$
$I^* := \{\langle N,\sim\rangle$ /N ist eine Menge und $\sim\, = \{\langle x,x\rangle / x \in N\}\}$

(1) "Übersetze" die Definitionen von M_p,M und I^* in die nicht-formale Sprache.
(2) Zeige: Für M_p,M und I^* gelten die gleichen Inklusionsbeziehungen,wie sie im Text bei der Freudschen Theorie vorliegen.
(3) Ist der Satz "$I^* \subseteq M$" empirisch? Ist er wahr oder falsch? Warum?

(ÜI-22): Es sei $x = \langle T,E,\leq,ASS,B,N,A,U,REAL\rangle$ ein Modell der Freudschen Theorie,$a_o \in A$,$t_o \in T$ und es gelte für x:
für alle $t \in T$,$a \in A$: wenn $t \neq t_o$ und $a \neq a_o$,dann gibt es kein $t' \in T$ und $e \in E$,sodaß $t \leq t'$ und REAL(t',a,e).
Zeige: Wenn in x alle Komponenten außer U bekannt sind,dann kann man U bestimmen.Gib U explizit an.

(ÜI-23): (1) Begründe die Behauptung im Text,daß eine der Komponenten von x unter den gemachten Voraussetzungen nur mit einer theorieabhängigen Bestimmungsmethode bestimmt werden kann.
(2) Gib für $x \in M_p$,$x = \langle t_1,\ldots,t_n\rangle$ und $j \leq n$ eine Definition von "t_j ist eine theoretische Komponente von x".

(ÜI-24): Sei $x \in M_p$.(1) Definiere: "y ist ein nicht-theoretisches Fragment von x".
(2) Es sei y ein nicht-theoretisches Fragment von x.Definiere: "z ist eine Ergänzung von y".

(3) Ist z in (2) identisch mit x?

(ÜI-25): Gib eine Definition von r im Fall der Freudschen Theorie.

(ÜI-26): Beweise: (1) (Nicht: für alle $Y \subseteq M_{pp}$ gilt: nicht $Y \subseteq \bar{r}(M)$) gdw (es gibt $Y \subseteq M_{pp}$ mit $Y \subseteq \bar{r}(M)$).
(2) (Nicht: für alle $Y \subseteq M_{pp}$ ist $Y \subseteq \bar{r}(M)$ falsch) gdw $M \neq \emptyset$

(ÜI-27): (1) Gib für die Freudsche Theorie eine formale (z. B. mathematische) Struktur $y \in M_{pp}$ an, sodaß für y die Konjunktion von 3) und 6) in der Definition der Modelle nicht erfüllt ist.
(2) Zeige: Nicht: $\{y\} \subseteq \bar{r}(M)$.

(ÜI-28): (1) Gib eine Liste der theoretischen Terme und eine Liste der nicht-theoretischen Terme der Freudschen Theorie an.
(2) Definiere M^o_{pp} für die Freudsche Theorie.
(3) Beweise: Für alle $Y \subseteq M^o_{pp}$: $Y \subseteq \bar{r}(M)$.

(ÜI-29): (1) Für $y \in M_{pp}$ definiere e(y) mit Hilfe der Funktion r (vergleiche ÜI-25). Zeige: $e(y) \subseteq M_p$.
(2) Zeige: (i) für $y \neq y'$ ist $e(y) \cap e(y') = \emptyset$
(ii) zu jedem $x \in M_p$ gibt es y mit $x \in e(y)$
(iii) für $y \in M_{pp}$ ist $e(y) \neq \emptyset$
(3) Eine Menge K von Teilmengen von M_p heißt <u>Klasseneinteilung</u> auf M_p gdw für alle $X, X' \in K$ gilt:
(i) $X \neq \emptyset$
(ii) wenn $X \cap X' \neq \emptyset$, dann $X = X'$
(iii) zu jedem $x \in M_p$ gibt es $X \in K$ mit $x \in X$.
Zeige: Die Menge $\{e(y)/y \in M_{pp}\}$ ist eine Klasseneinteilung auf M_p. (Benutze (2)).
(4) Wir definieren für $x, x' \in M_p$:
$x \sim x'$ gdw es gibt y mit $x \in e(y)$ und $x' \in e(y)$.
Zeige: Für alle $x, x', x'' \in M_p$ gilt: (i) $x \sim x$, (ii) wenn $x \sim x'$, dann $x' \sim x$, (iii) wenn $x \sim x'$ und $x' \sim x''$, dann $x \sim x''$.
($x \sim x'$ bedeutet, daß x und x' äquivalent sind.)

(5) Definiere eine Teilmenge E von $M_p \times M_p$ so,daß gilt
für alle x,x': $\langle x,x'\rangle \in E$ gdw $x \sim x'$.

(ÜI-30): Füge zu den Axiomen der Freudschen Theorie folgendes Axiom hinzu:

Für alle $t,t' \in T$,wenn $t < t'$,dann ist für alle $a \in A$
$\{e \in E/REAL(t,a,e)\} \subseteq \{e \in E/REAL(t',a,e)\}$

und zeige: Nicht zu jedem partiellen Modell y,das 3) und 7) der Definition der Modelle erfüllt,gibt es ein $x \in M$ mit $r(x)=y$.

(ÜI-31): (1) Beweise: $I \in A(K)$ gdw es gibt $X \subseteq M$ mit $\bar{r}(X)=I$ und $X \in Q$.
(2) Ersetzt man in (1) auf der rechten Seite den Ausdruck "$\bar{r}(X)=I$" durch "$I \subseteq \bar{r}(X)$",so gilt (1) nicht mehr.Wie muß man die Definition von A(K) ändern,damit (1) wieder gilt?

Kapitel II Mikroökonomie

Die Mikroökonomie beschäftigt sich mit menschlichen Handlungen,die auf den Austausch von Gütern abzielen.Solche Handlungen bestehen etwa in der Herstellung von Gütern,dem Handel mit Gütern,dem Kauf und Verkauf von Gütern und dem Tausch von Gütern.Besonders wichtig sind hier die Handlungen,bei denen Güter getauscht werden.Ihre Analyse,theoretische Beschreibung und Erklärung bildet den Kern der Mikroökonomie,weil praktisch alle anderen mikroökonomischen Aktivitäten auf den Tausch von Gütern in irgendeiner Weise zurückführbar sind.

BEISPIEL 1): Herr Wagner hat DM 2oo.ooo.- geerbt und möchte sich dafür ein Häuschen kaufen.Witwe Meier hingegen fühlt sich in dem von ihr allein bewohnten Haus nicht mehr wohl: es ist ihr zu groß.Sie will verkaufen.Wagner schaut sich das Haus an und dann setzen sich beide -vielleicht bei einer Tasse Kaffee- zusammen,um die Möglichkeit eines Kaufs in Ruhe zu besprechen.Wagner möchte das Haus schon kaufen,der springende Punkt in der Unterhaltung ist deshalb der Kaufpreis.Wagner überlegt und erzählt,was andere Häuser ähnlicher Größe in ähnlicher Lage kosten würden,daß er für sein Geld auch ein stattliches Bauernhaus auf dem Land bekommen könne,daß es natürlich im Stadtzentrum nicht einmal für eine Drei-Zimmer-Eigentumswohnung reichen würde,daß er aber auf jeden Fall ein kleines Gärtchen dabei haben wolle,sodaß eine Wohnung sowieso nicht in Frage komme,daß Frau Meiers Haus auch wieder nicht <u>so</u> verkehrsgünstig liege,daß er im Fall eines Kaufes mindestens DM 5o.ooo.- für Renovierung ausgeben müsse und daß,wegen der Ölkrise,die zwei Garagen bald nur noch als Abstellkammern benutzt werden könnten.Er denkt darüber nach,ob er nicht ein schöneres Haus von den Zinsen mieten könne,die er bei der Bank für seine DM 2oo.ooo.- bekäme.Er fragt sich,ob es nicht besser wäre,für DM 4o.ooo.- einen schicken Straßenkreuzer zu kaufen,solange es noch solche gibt und dafür weniger für ein Haus auszugeben.Witwe Meier hält entgegen,daß das Haus in tadellosem Zustand sei,weder verputzt noch neu gedeckt werden müsse,daß es mit der Zentralheizung im Keller und einer uralten Fichte im Garten ausgestattet sei,daß man in 35 Minuten mit Bus und Straßenbahn im Zentrum sei,daß die Straßen nachts sehr ruhig seien und die Nachbarn alle freundlich und nichts gegen Kinder hätten.

Schließlich muß einer von beiden konkret werden.Entweder Frau Meier sagt,wieviel sie für das Haus haben will oder Herr Wagner sagt,wieviel er bietet.Witwe Meier fordert DM 19o.ooo.- und Herr Wagner bietet DM 16o.ooo.-.Es folgt eine weitere Gesprächsrunde mit dem Ziel,die Vorstellungen einander anzugleichen.Nach einer Woche Bedenkzeit,in der beide den Handel noch einmal mit Bekannten und Verwandten diskutieren,kommt es schließlich zum Abschluß.Herr Wagner kauft das Haus für DM 175.ooo.-.

Beide Parteien sind der Meinung,ein "gutes" Geschäft gemacht zu haben und werden hierin von ihren Freunden und Verwandten bestärkt.Warum ist das so? Herr Wagner hat,wie gesagt, den Wunsch,Hausbesitzer zu werden.Da er nur eine relativ kleine Geldmenge zur Verfügung hat,kommt ein Haus,wie er es sich eigentlich wünscht,nämlich eine Luxusvilla für 3 Mio,nicht in Betracht.Er muß zusehen,für sein Geld ein solches Haus zu finden,das in wichtigen Punkten seiner Traumvilla nahekommt.Das Haus sollte eine gewisse Mindestgröße haben,damit ausreichend Platz für seine Familie da ist.Es sollte ruhig liegen,denn Wagner hat einen leichten Schlaf.Es sollte ein kleines Gärtchen haben,denn er ist Hobbygärtner und schwärmt davon,eigenes Gemüse zu züchten.Es sollte eine Zentralheizung haben,denn Wagner ist ein bißchen faul und schleppt nicht gerne Kohlen. Das Haus soll öffentliche Verkehrsmittel und Schulen in der Nähe haben,damit die Kinder sich relativ unabhängig bewegen können.Schließlich sollen die Nachbarn freundlich sein,denn er will,daß seiner Kinder später ausgeglichene Bürger werden und nicht unter Neurosen leiden.Indem er all diese Faktoren in Erwägung zieht und Vergleiche mit anderen angebotenen Häusern anstellt,findet er,daß keines der Häuser,die er für DM 2oo. ooo.- hätte haben können,so gut abschneidet,wie Frau Meiers Haus.Dieses Haus ist unter den ihm auferlegten Beschränkungen -dem knappen Geld- die optimale Möglichkeit.Natürlich sieht er auch Alternativen,sein Geld auf andere Weise loszuwerden.Etwa,wenn er über den Straßenkreuzer nachdenkt oder von einer Weltreise oder einem einjährigen Playboyleben in Acapulco träumt.Aber diese Alternativen reizen ihn nicht wirklich.Er ist realistisch genug einzusehen,daß sie zu seinem bisherigen Lebensstil und Charakter überhaupt nicht passen und er sich in diesen Rollen höchstens unwohl fühlen würde.Auch unter allen möglichen Alternativen ist also der Kauf des Hauses optimal.

Frau Meier hat weniger Probleme.Sie ließ das Haus durch einen Makler anbieten,welcher ihr empfohlen hatte,DM 19o.ooo.- zu verlangen.Sie schloß daraus,daß eine größere Summe nicht zu erzielen sei.Von den anderen Interessenten,die sich gemeldet hatten,war nach Verhandlung DM 165.ooo.- das bisher höchste Angebot.Die Summe von DM 175.ooo.- erscheint ihr daher unter den gegebenen Umständen,den Erfahrungen mit anderen Interessenten und dem Rat des Maklers als optimal.

BEISPIEL 2): Hänschen und Susanne gehen zusammen von der Schule nach Hause.Sie pflegen dabei ein Geschäft aufzusuchen,wo sie Lutscher mit eingelassenen Plastikfiguren kaufen.Nach Genuß des Lutschers wird die jeweils zum Vorschein kommende Figur in eine Sammlung bereits "erlutschter" Figuren eingereiht. Hänschen hat als strammer Junge die Tendenz,seine Sammlung durch Flugzeuge,Panzer,Kanonen und Schlachtschiffe zu bereichern,während Susanne Puppen und Tiere vorzieht.Daneben haben beide eine gemeinsame Präferenz (Vorliebe) für Comicfiguren und Schlagerstars.Susanne hat gerade den "Panzerkreuzer Graf Spee" abgelutscht,während Hänschen eine neue Micky-Maus sein eigen nennt.Hänschen möchte den Panzerkreuzer haben und bietet dafür,da rohe Gewalt bei den Kindern bereits verpönt ist,zwei Comicfiguren: "Micky-Maus" und "Tom".Susanne möchte aber drei Figuren,darunter "Heino" und so beginnen beide zu handeln. Hänschen muß schließlich,da er das schöne Stück unbedingt eintauschen will,die drei verlangten Figuren dafür hergeben.Es kommt zum Tausch.

Wieso tauschen die beiden gerade im Verhältnis 1:3 ? Für Hänschen,der ja dreimal soviel hergeben mußte,dürften mehrere Faktoren eine Rolle spielen.Erstens zieht er großes Prestige daraus,daß er in seiner Klasse Besitzer der größten Sammlung an Kriegsschiffen ist.Er möchte diesen Sonderstatus auf jeden Fall behalten,aber wegen des großen Umfangs seiner Sammlung kommen nur noch relativ selten neue Schlachtschiffe aus den Lutschern.Zweitens ist der spezielle Kreuzer besonders schön und mit vielen Details versehen.Drittens verbindet er gerade mit diesem Kreuzer starke gefühlsmäßige Vorstellungen,die in ihm durch einen kürzlich im Kino gesehenen Film gleichen Namens geweckt wurden.Diese Faktoren überwiegen die Herausgabe der drei anderen Stücke,obwohl er noch nie bei einem ähnlichen Tausch einen solch hohen "Preis" gezahlt hatte.Vier Figuren als Gegenleistung hätte er auf keinen Fall gegeben,sodaß der eingegangene Tausch unter allen Alternativen,wobei die Möglichkeit gar keines Tausches einbezogen ist,die optimale Alternative darstellt.

Susanne hat beim Durchprobieren verschiedener Forderungen bemerkt,daß sie vier Figuren nicht bekommen würde.Da ihr an dem Kreuzer nicht viel liegt,war das nächsthohe Angebot,drei Figuren,für sie die beste Alternative.

BEISPIEL 3): Im Dorf Großmalum wohnen zur Zeit Karls des Großen insgesamt 47 Personen.Es gibt den Wirt mit dreiköpfiger Familie,den Schmied (Junggeselle),den Sattler mit Frau und vier Kindern,sowie noch sieben Bauernfamilien.Auch Wirt, Schmied und Sattler treiben nebenher Ackerbau.Im Dorf gibt es genau 82 Taler und 15 Kreuzer.Der größte Teil des Geldes liegt in Sparstrümpfen verborgen und kommt nur selten zutage.Einige Kreuzer wechseln den Besitzer im Wirtshaus,beim Schmied,beim Sattler und wenn der Wirt,der selber kein Vieh hält,einem Bauern etwas abkauft.Großmalum liegt abseits von Handelsstraßen und Händler kommen selten vorbei.

Die einzelnen Personen,oder besser: die jeweiligen Familien,erzeugen bestimmte Mengen von Gütern.Die Bauern erzeugen bestimmte Mengen an Getreide,Gemüse,Obst,Salat,Milch,Eiern und

Tieren.Der Wirt produziert im wesentlichen Gerstensaft,der Sattler Sättel und der Schmied beschlagene Pferdehufe.Die Frauen stellen Kleidungsstücke her und Wäsche,die Männer bei Bedarf Schuhe und Hausrat.

Das Dorf ist ein in sich geschlossenes kleines mikroökonomisches System.Neben der Produktion wird noch getauscht,gekauft und verkauft.Die Bauern tauschen Vieh untereinander,um eine Vermehrung ihres Bestandes zu ermöglichen,der Wirt kauft und verkauft Speisen und Getränke und Schmied und Sattler verkaufen ihre Produkte oder tauschen sie gegen andere Güter ein. Die verschiedenen Arten von Gütern,die im Dorf existieren,sind in ihren Wertverhältnissen untereinander bestimmt.Die Leute wissen,daß ein Krug Bier genausoviel wert ist,wie ein durchschnittlich großes Huhn,nämlich zwei Kreuzer.Eine Kuh kostet zwei Taler,ein Schwein die Hälfte.Moderner ausgedrückt: jedes Gut hat seinen Preis.Oder genauer: für jede Güterart ist bekannt,wieviel eine Einheit des betreffenden Gutes unter normalen Umständen an Geld wert ist.

Am 16.Mai des Jahres 801 geht im Dorf alles seinen gewohnten Gang.Alle Bewohner gehen ihren gewohnten Tätigkeiten nach. In der Zeitspanne von 6 Uhr früh bis 24 Uhr abends finden genau drei ökonomische Transaktionen statt.Bauer Hochleitner sucht seinen Nachbarn,den Moosberger,auf,um dort einen Hahn gegen ein Huhn,welches er mitbringt,einzutauschen.Der Fuchs hat ihm in der Nacht seinen eigenen Hahn gestohlen und da dieser Hahn in letzter Zeit seinen Pflichten nur sehr schlaff nachgegangen war,besteht Gefahr,daß der Nachwuchs ausbleibt. Der Moosberger,der schon ähnliche Erfahrungen mit dem Fuchs gemacht hatte,hält sich deshalb einen Reserve-Hahn.Er ist bereit,diesen gegen ein Huhn einzutauschen,sodaß der Handel stattfindet.Der Wirt ist zur gleichen Zeit beim Kürtlbauer und will ihm ein Schwein abkaufen.Er hat gehört,daß der Schweinebestand des Kürtlbauern im Moment im Dorf der größte ist und daß der Kürtlbauer auch selbst schon an eine Schlachtung denkt.Um einen Taler kommt der Handel zustande.Das dritte Geschäft findet etwas später beim Schmied statt,der dem Moosberger sein Pferd neu beschlägt.Er bekommt dafür acht Kreuzer.

Unter den gegebenen Umständen sind alle drei Geschäfte für alle Beteiligten optimal.Der Hochleitner braucht einen Hahn, damit seine Hühner nicht aussterben und der Tausch mit dem Moosberger ist für ihn die einzige Möglichkeit.Sein Partner, der Moosberger,hat von dem Tausch zwar keine großen Vorteile, er ist aber an gut-nachbarlichen Beziehungen interessiert und durch den Tausch verschlechtert er seine Lage nicht,weil unter den gerade geschlüpften Küken auch ein Hähnchen ist.Der Wirt weiß,daß kein anderer Bauer im Dorf im Moment ein Schwein verkaufen würde.Der Kürtlbauer wollte sowieso ein Schwein loswerden und legt den Taler,den üblichen Preis für ein Schwein,mit gutem Gefühl in seinen Strumpf.Für den Schmied ist das Beschlagen von Pferden die übliche Arbeit.Führt er sie nicht aus,entzieht er sich die Existenz.Der Moosberger,der dafür acht Kreuzer zahlt,weiß,daß dies der übliche Preis ist und daß ihm diese Arbeit sonst keiner machen könnte.So ist das Geschäft auch für ihn optimal.

Worin besteht die Gemeinsamkeit in den Beispielen? Sie besteht in einem Tausch oder mehreren Täuschen.In Beispiel 1) tauscht Frau Meier ein Gut,nämlich ihr Haus,gegen eine bestimmte Menge eines anderen Gutes,nämlich Herrn Wagners Geld. Genauso tauscht Herr Wagner eine Menge seines Geldes,nämlich 175.ooo Einheiten seines Gutes "Geld",gegen eine Einheit des Gutes "Haus",die Frau Meier gehört.Es geht also um den Tausch zweier Mengen von Gütern oder anders,um das Verhältnis von Gütermengen.Auch in Beispiel 2) ist das wesentliche Faktum ein Mengenverhältnis.Die beiden Kinder tauschen ihre Figuren im Verhältnis 3:1.Betrachten wir die Panzerkreuzer und die anderen Figuren als zwei Güterarten und jede Figur als eine Einheit,so können wir sagen,daß ein Tausch von Gütermengen stattfand.In Beispiel 3) finden mehrere Täusche statt.Zuerst wird eine Einheit des Gutes "Hahn" getauscht.Auch der Kauf des Schweines ist ein Tausch: eine Einheit des Gutes "Schwein" und eine Einheit der Güterart "Geld" wechseln den Besitzer.(Da das Dorf relativ abgeschlossen ist und sich die Geldmenge kaum ändert,kann man Geld wie eine Güterart behandeln.) Auch das Beschlagen des Pferdes läßt sich so sehen.Die eine Güterart ist hier "Arbeit eines Spezialisten",die andere Geld.Üblicherweise wird die erste Güterart in Stunden als Einheiten gerechnet.Im Beispiel dürfte allerdings Zeit kein so kostbarer Faktor sein,sodaß man den ganzen Arbeitsvorgang als eine Einheit rechnen sollte.Es wird dann eine Einheit "Arbeit" gegen 8/12 Einheiten (ein Taler hat 12 Kreuzer) der Güterart Geld getauscht.

Die Mikroökonomie analysiert Tauschgeschäfte ähnlich den gerade beschriebenen.Es geht ihr darum,zu erklären,warum die jeweiligen Güter gerade in den vereinbarten Mengenverhältnissen getauscht wurden und nicht in anderen Mengenverhältnissen. Frau Meier und Herr Wagner hätten ja in Beispiel 1) genausogut im Mengenverhältnis 1:2oo.ooo ,Hänschen und Susanne in Beispiel 2) im Verhältnis 1:2 und z.B.Schmied und Moosberger in Beispiel 3) im Verhältnis 1:10/12 "tauschen" können.Warum wurde gerade in den vorliegenden Verhältnissen getauscht? Oder,was auf das Gleiche hinausläuft:" Wieso sind die Beteiligten alle der Meinung,ein "gutes" Geschäft zu machen?"

In den jeweiligen Beispielen wurde angedeutet,warum sie dieser Meinung sind.Unter Abwägung der Umstände,bei Berücksichtigung aller möglicher Alternativen und der Einschränkungen,denen sich die Beteiligten unterworfen sehen,stellen die Tauschgeschäfte jeweils optimale Verhältnisse für alle Beteiligten her.Dabei sind die Optimalitätskriterien natürlich von Person zu Person verschieden.Für Herrn Wagner in Beispiel 1) sind die für Optimalität relevanten Faktoren (Größe und Ruhe des Hauses,Gärtchen,Zentralheizung,öffentliche Verkehrsmittel,Schulen,freundliche Nachbarn) andere als für seine Geschäftspartnerin Frau Meier (Geldmenge).Hänschens Gründe,die den Tausch für ihn optimal machen (größte Sammlung,Schönheit, Kino-Emotionen) sind ganz andere als die,die Susanne zum Tausch bewegen (Figurenmenge).Auch in Beispiel 3) sind die Faktoren,die den Tausch beeinflussen,von Person zu Person verschieden.Hochleitners Grund (Hühnerzucht) ist verschieden von Moosbergers Grund (gutnachbarliche Beziehungen),der Grund des Wirts (er braucht Fleisch für Mahlzeiten) ist verschieden von dem des Kürtlbauern (Geld).Der entscheidende Faktor für den Schmied (Geld) ist ein anderer als der,der seinen Partner,den

Moosberger,zum Geschäft treibt (sein Pferd zu schonen).

Um all diese verschiedenen und von Fall zu Fall wechselnden Faktoren zu erfassen,führt die Mikroökonomie einen einzigen, sehr umfassenden theoretischen Begriff ein: den Nutzen.All die genannten Faktoren und Gründe lassen sich zusammenfassend ausdrücken,indem man sagt,die Beteiligten hätten von dem Tausch einen Nutzen gehabt.Wie die Analyse zeigt,kann man sogar noch schärfer formulieren: die Beteiligten haben nicht nur einen Nutzen gehabt,sie haben ihren Nutzen unter den jeweiligen Umständen sogar optimiert oder maximiert.Es gab in der jeweiligen Situation keine Alternative,in der ihr Nutzen größer gewesen wäre.Das heißt aber gerade,daß der tatsächliche Nutzen beim Tausch relativ zu den vorliegenden Alternativen maximal (am größten) ist.

Auf die Frage,warum gerade in den vorliegenden Mengenverhältnissen getauscht wird,lautet also die Antwort der Mikroökonomie:"Weil gerade bei den vorliegenden Mengenverhältnissen alle Beteiligten maximalen Nutzen haben".

Diese Antwort enthält zwei zentrale Gesichtspunkte.Erstens wird der Begriff des Nutzens ins Spiel gebracht und damit verbunden die Vorstellung und Behauptung,jeder Tauschpartner hätte einen wohlbestimmten Nutzen.Zweitens wird angenommen,daß die Akteure eine bestimmte Verhaltensregel befolgen,nämlich die,ihren Nutzen zu maximieren.

"Nutzen" ist der zentrale theoretische Begriff der Mikroökonomie.Er allein ergänzt das Bild von konkreten Tauschsituationen in einer Weise,die sie theoretisch beschreibbar und erklärbar machen.Er beinhaltet die Vorstellung,daß für jede Person in jeder Situation konkrete Faktoren angebbar sind,von denen das Wohlbefinden (der Nutzen) dieser Person direkt abhängt.Diese Faktoren variieren von Situation zu Situation und von Person zu Person,sodaß man keine allgemeine Definition des Nutzens geben kann.Die Bedeutung von "Nutzen" als theoretischem Term bleibt in der Theorie bewußt ungenau und vage.Der Grund dafür ist,daß man nur so den Term in möglichst vielen verschiedenen konkreten Situationen anwenden kann.Der Nutzen dient zunächst nur dazu,ein sehr grobes Bild,ein Rahmenmodell,zu zeichnen,das bei Bedarf und im Einzelfall noch weiter zu ergänzen ist.In der jeweiligen Situation läßt sich dann meist genau definieren,worin der Nutzen besteht.

Das Wort "Nutzen" hatte auch schon eine Bedeutung in der Sprache,bevor es die Mikroökonomie gab.Diese Bedeutung kommt in Sätzen zum Ausdruck wie etwa "Das Pferd ist dem Landmanne nützlich" oder "Dein Verhalten hat mir sehr genützt".Solche umgangssprachlichen Verwendungen des Wortes "Nutzen" stehen in keiner Weise im Widerspruch zur Verwendung des Wortes in der Mikroökonomie.Vielmehr lassen sich die alltagssprachlichen Situationen meist auch unter ökonomischen Gesichtspunkten analysieren und das umgansgsprachlich verwendete Wort drückt dann gerade das aus,was auch der theoretische Term ausdrücken soll. Die Situation ist hier also anders als beim "Unbewußten" in der Psychologie (Kapitel I).

Der zweite oben erwähnte Gesichtspunkt,die Verhaltensregel, ist aufgrund der Vagheit des Wortes "Nutzen" ebenfalls ziemlich vage.Sie wird erst in konkreten Situationen richtig verständlich.Wenn in einer Situation klar ist,worin der Nutzen besteht,so kann man fragen,ob eine Person ihren Nutzen maximiert.Die Verhaltensregel der Nutzenmaximierung wurde aus vielen Beispielen,in denen man beobachtete,daß sie befolgt wurde, herausgezogen (abstrahiert).In vielen Situationen,in denen man weiß,worin der Nutzen einer Person genau besteht,stellt man fest,daß sie danach strebt,ihn zu maximieren.Hier muß aber auch gewarnt werden.Erstens wird diese Regel nicht immer befolgt,sie hat ziemlich viele Ausnahmen.Zweitens darf man sich nicht zu ihrer Befolgung <u>nur</u> dadurch verleiten lassen,daß man sie als relativ häufig befolgte Regel erkannt hat.

Schließlich sollte nicht verschwiegen werden,daß durch Erklärungen über Nutzenmaximierung auch solche Faktoren unterdrückt oder vernachlässigt werden können,die man bei einigem Nachdenken durchaus als relevant bezeichnen möchte.

BEISPIEL 1),Fortsetzung: Stellen wir uns vor,Herr Wagner hätte, im Gegensatz zur bisherigen Beschreibung,gewisse psychische Schwierigkeiten.Nehmen wir an,er hätte die Angewohnheit,grundsätzlich alle größeren ökonomischen Entscheidungen seiner Mutter zu überlassen.Seine Mutter aber hätte,das ist denkbar, eine Abneigung gegen Haus- und Grundbesitz,z.B.aus Furcht vor Zerstörung im Kriege.Bei Auftreten dieses Faktors hätte Herr Wagner das Haus vermutlich auch für DM loo.ooo.- nicht gekauft.

BEISPIEL 2),Fortsetzung: Susanne hätte neidisch sein können, daß Hänschen mehr Kreuzer besitzt als alle anderen Klassenkameraden.Sie hätte aus diesem Grunde,um einen Tausch möglich zu machen,acht Figuren als Gegenleistung fordern können.

Die beschriebenen Faktoren sind Einflüsse "von außen",welche unter normalen Umständen für den Tausch irrelevant sind.Sie können aber auf Grund z.B.der psychischen Verfassung eines Beteiligten relevant werden.Derartige ("externe") Faktoren gehen in eine Erklärung durch Nutzenmaximierung <u>nicht</u> ein.Sie werden als mikroökonomisch irrelevant ausgeschlossen.

POTENTIELLE MODELLE

Wir wollen nun genauer sehen,was hinter den bisherigen intuitiven Erläuterungen steckt.Dazu müssen wir die Begriffe der Theorie präzisieren und die inhaltlichen Beziehungen (Axiome) genau aufschreiben.Der allgemeine von der Theorie erfaßte Fall ist im Prinzip nicht komplizierter als unser Beispiel 3).Wir können uns deshalb bei Einführung und Einübung in die Theorie immer die Anwendung von Beispiel 3) vor Augen halten.

Das ökonomische Geschehen wird in einer bestimmten Zeitspanne betrachtet.Am Anfang dieser Zeitspanne befindet sich das ökonomische System (etwa das Dorf Großmalum) in einem Zustand q^a,dem "Anfangszustand",am Ende der Zeitspanne in einem Zustand q^e ,dem "Endzustand".In der Zwischenzeit ist getauscht worden.Welche Faktoren sind nun zur Beschreibung der Zustände q^a und q^e vom ökonomischen Gesichtspunkt aus relevant? Sicher brauchen wir die Personen des Dorfes.Es muß ja gesagt werden, wer mit wem tauscht.Weiter brauchen wir eine Übersicht über die verschiedenen Arten von Gütern,die im Dorf existieren.Denn wenn beim Übergang von q^a zu q^e eine Kuh gegen zwei Schweine getauscht wurde,so müssen in den Zustandsbeschreibungen die Güterarten "Kühe" und "Schweine" vorkommen.Auch Mengen eines

Gutes sind relevant,denn es macht einen Unterschied,ob zwei oder drei Schweine für eine Kuh eingetauscht werden.

Die Zustände sind mit diesen drei Faktoren: Personen,Güterarten und Gütermengen vollständig erfaßbar.Um den Übergang zwischen Anfangs- und Endzustand,der durch einen Tausch oder mehrere Täusche charakterisiert ist,zu beschreiben und zu erklären,brauchen wir noch Preise und den theoretischen Begriff des Nutzens.Insgesamt haben wir also folgende Liste von Faktoren oder Begriffen,die zur Beschreibung gebraucht werden.

J	"Personen"
G	"Güterarten"
q	"Gütermengen"
p	"Preise"
U	"Nutzen"

Diese Begriffe müssen nun im einzelnen festgelegt werden.J soll einfach die Menge aller in der betrachteten Situation vorkommenden Personen sein.J ist also eine endliche Menge

$$J=\{\pi_1,\ldots,\pi_m\},$$

wobei die Zeichen (Namen) $\pi_1,\ldots,\pi_m$ gerade für die relevanten Personen stehen.Die Zahl m gibt an,mit wie vielen Personen wir es zu tun haben.Ebenso soll G eine endliche Menge sein.

$$G=\{\gamma_1,\ldots,\gamma_n\},$$

wobei $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ die verschiedenen,in der betrachteten Situation vorkommenden Güterarten (wie etwa "Kohl","Kühe","Milch" usw.) sind,d.h.genauer: bezeichnen.

Wollen wir über eine Person eine Aussage machen,die genauso gut auch auf andere Personen zutrifft,so lassen wir bei der Bezeichnung der Person einfach den unteren Index weg." π " dient dann als eine Variable für Personen(namen).Erst wenn man für π einen speziellen Personennamen,z.B. π_2,einsetzt,entsteht ein Satz,dessen Richtigkeit man nachprüfen kann.Genauso verfahren wir bei Güterarten.Wird über eine beliebige Güterart geredet,so schreiben wir einfach γ statt γ_i mit unspezifiziertem Index.Dies soll noch einmal deutlich aufgeschrieben werden.

Als Variablen für Personen(namen) dienen die Buchstaben π und π' ($\pi, \pi' \in J$).
Als Variablen für (Namen von) Güterarten dienen die Buchstaben γ und γ' ($\gamma, \gamma' \in G$).

Die Gütermengen lassen sich nicht so einfach behandeln.Wir müssen ja Redewendungen der Art "Person π besitzt von Gut γ die Menge α " ausdrücken können (ÜII-1).Dabei steht α für eine Zahl,denn Mengen werden durch Zahlen angegeben.Wir müssen die Gütermengen also so einführen,daß für jede Person und jede Güterart eine Zahl angegeben wird,nämlich gerade die Menge,die die Person von der betreffenden Güterart besitzt.Dies erreichen wir wie folgt.Wir fassen q als Funktion von $J \times G$ in die Menge $\mathbb{R}_0^+$ der nicht negativen reellen Zahlen auf.

$$q: J \times G \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

(ÜII-2).Diese Funktion leistet genau das Gewünschte.Wählt man nämlich zwei passende Argumente,eine Person π und eine Güterart γ ,so ordnet q diesen Argumenten genau eine Zahl $q(\pi, \gamma)$ zu.Dabei können wir gleich annehmen,daß die Zahl nicht negativ ist,denn negative Gütermengen machen (bei unserer Vorstellung von "Gut") keinen Sinn.Eine solche Funktion nennen wir eine Güterverteilung oder einfach Verteilung,denn sie faßt Information darüber zusammen,wie die Güterarten mengenmäßig auf die Personen verteilt sind.

Manchmal werden wir uns nur für die Gütermengen interessieren,die eine bestimmte Person π besitzt,wobei uns die Gütermengen,die andere Personen besitzen,gleichgültig sind.Die im Besitz von π befindlichen Gütermengen beschreiben wir durch eine Funktion q_π :

$$q_\pi : G \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

Die Funktion q_π ordnet jeder Güterart γ diejenige Menge $q_\pi(\gamma)$ dieser Güterart zu,die sich in π's Besitz befindet.Die Funktion q_π gibt somit an,wie sich der Besitz von Person π mengenmäßig auf die einzelnen Güterarten verteilt.Wir werden die Funktionen q_π als Ausstattungen bezeichnen.q_π ist kein eigener Grundbegriff,denn q_π läßt sich aus q definieren.Wenn wir die Funktion q kennen,so definieren wir

$$q_\pi(\gamma):=q(\pi,\gamma)$$

und erhalten eine Funktion $q_\pi: G \to \mathbb{R}_o^+$. Wenn wir umgekehrt alle Funktionen $q_{\pi_1},\ldots,q_{\pi_m}$ kennen, so läßt sich mit ihrer Hilfe die Funktion q definieren. Man definiert dazu

$$q(\pi,\gamma):=q_\pi(\gamma)$$

wodurch man eine Funktion $q: J \times G \to \mathbb{R}_o^+$ erhält. Es ist klar, daß alle Funktionen $q_{\pi_1},\ldots,q_{\pi_m}$ zusammen genau die gleiche Information wie die Funktion q enthalten (ÜII-3). Wir schreiben auch $q=\langle q_{\pi_1},\ldots,q_{\pi_m}\rangle$, um dies auszudrücken.

Auch die Preise werden durch eine Funktion ausgedrückt. Betrachten wir eine Funktion

$$p: G \to \mathbb{R}^+.$$

p ordnet jeder Güterart γ eine positive reelle Zahl $p(\gamma)$ zu, die wir als Preis der Güterart γ, d.h. als Preis einer Einheit von γ ansehen können.

Der Nutzen ist schließlich nicht nur inhaltlich, sondern auch formal der komplizierteste Begriff. Wir erfassen ihn wie folgt. Für eine bestimmte Person π betrachten wir eine Funktion

$$U_\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad .$$

U_π heißt <u>die Nutzenfunktion</u> der Person π. $\mathbb{R}^n$ ist hier die Menge aller n-Tupel (vergleiche Kap.I, S.17) $\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_n\rangle$, deren "Komponenten" $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ reelle Zahlen sind. U_π ordnet formal je n reellen Zahlen $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ eine reelle Zahl $U_\pi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ zu. Wie ist diese Zahl zu interpretieren? Zunächst ist n nach unserer obigen Vereinbarung betreffs G die Gesamtzahl der vorhandenen Güterarten. Wir können also ein Zahlentupel $\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_n\rangle$ so deuten, daß es Gütermengen angibt und zwar in der richtigen Reihenfolge: von jeder Güterart eine Menge. Das heißt, wir können $\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_n\rangle$ so lesen, daß α_1 eine Menge von Gut γ_1, α_2 eine Menge von Gut γ_2 und...und α_n eine Menge von Gut γ_n ist. Sind alle α_i nicht negativ, so stellt ein derartiges Tupel $\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_n\rangle$ Gütermengen dar, die Person π möglicherweise besitzen könnte. Einem solchen möglichen Besitz

$<\alpha_1,..,\alpha_n>$ ordnet dann U_π eine reelle Zahl $U_\pi(\alpha_1,..,\alpha_n)$ zu. Diese Zahl gibt die Größe des Nutzens an,den Person π aus dem Besitz oder dem Konsum dieser Gütermengen zieht.Dabei ist Nutzen im früher erklärten Sinn zu verstehen.Unter all den möglichen Gütermengen$<\alpha_1,..,\alpha_n>$ findet man auch die Kombination, die π tatsächlich besitzt,nämlich $<q_\pi(\gamma_1),...,q_\pi(\gamma_n)>$. Setzt man diese speziellen Gütermengen als Argumente in U_π ein,so erhält man den Nutzen $U_\pi(q_\pi(\gamma_1),..,q_\pi(\gamma_n))$,den Person π aus den in ihrem Besitz befindlichen Gütermengen $q_\pi(\gamma_1)$, $...,q_\pi(\gamma_n)$ zieht.Aus formalen Gründen lassen wir negative Nutzenwerte zu.Sie sind nicht als "negativer" Nutzen im Sinne von Schmerz oder Leid zu verstehen.Vielmehr muß man sich beim Auftreten negativer Werte vorstellen,daß die Nutzenskala einfach zahlenmäßig in die negativen Zahlen hinein verschoben ist.Das heißt,negative Nutzenwerte bezeichnen "positiven",d.h. echten Nutzen,der nur kleiner ist als der durch positive Zahlen dargestellte.Zum Beispiel könnte man folgende Nutzenskala einführen

Gütermenge (in Einheiten)	1	2	3	4	5	6	7	...
Nutzen	-10	-7	-4	-1	+1	+3	+4	...

Zusammenfassend haben wir damit unsere fünf Begriffe J,G,q,p,U der Form nach wie folgt festgelegt.

$J=\{\pi_1,..,\pi_m\}$ ist eine endliche Menge (von Personen)

$G=\{\gamma_1,..,\gamma_n\}$ ist eine endliche Menge (von Güterarten)

$q: J \times G \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ (eine Güterverteilung)

$p: G \rightarrow \mathbb{R}^+$ (eine Preisfunktion)

$U_\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ für alle $\pi \in J$ (Nutzenfunktionen)

Schließlich fassen wir aus ästhetischen Gründen die verschiedenen Nutzenfunktionen zu einer einzigen Funktion zusammen. Dies geschieht genauso,wie bei obiger Definition von q aus den q_π.Wenn man die Funktionen $U_{\pi_1},..,U_{\pi_m}$ gegeben hat,kann man definieren

$$U(\pi_i,\alpha_1,...,\alpha_n):=U_{\pi_i}(\alpha_1,..,\alpha_n)$$

Dann ist $U: J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und U enthält genau die Informationen, die alle U_π enthalten. Aus U lassen sich die U_π wieder zurückgewinnen (ÜII-4).

Wem die vorhergehenden, etwas abstrakten Bestimmungen nicht vollkommen verständlich sind, der kann sich beim Lesen symbolischer Ausdrücke und Formeln mit der folgenden "Übersetzungstabelle" behelfen.

Symbol	zu lesen als
J	"die Menge der Personen"
$\pi_i \in J$	" π_i ist eine Person"
$\pi \in J$	" π ist eine Person"
G	"die Menge der Güterarten"
$\gamma_j \in G$	" γ_j ist ein Gut (eine Güterart)"
$\gamma \in G$	" γ ist ein Gut"
q	"(eine) Güterverteilung"
$q(\pi, \gamma)$	"die Menge von Gut γ, die Person π bei der Verteilung q besitzt"
q_π	"die Ausstattung von Person π (bei Verteilung q"
$q_\pi(\gamma)$	"die Menge von Gut γ, die Person π bei der Ausstattung q_π besitzt"
p	"(eine) Preisfunktion"
$p(\gamma)$	"der Preis von Gut γ"
U_π	"die Nutzenfunktion der Person π "
$U_\pi(\alpha_1,..,\alpha_n)$	"der aus dem möglichen Besitz der Gütermengen $\alpha_1,..,\alpha_n$ für Person π resultierende Nutzen"
$U_\pi(q_\pi(\gamma_1),...,q_\pi(\gamma_n))$	"der Nutzen, der sich für Person π aus den (bei Verteilung q) in π's Besitz befindlichen Gütermengen $q_\pi(\gamma_1),...,q_\pi(\gamma_n)$ ergibt"
U	"(eine) Nutzenfunktion"
$U(\pi,\alpha_1,..,\alpha_n)$	wie bei $U_\pi(\alpha_1,..,\alpha_n)$
$U(\pi,q_\pi(\gamma_1),..,q_\pi(\gamma_n))$	wie bei $U_\pi(q_\pi(\gamma_1),...,q_\pi(\gamma_n))$

Wenn ein ökonomisches System über eine Zeitspanne hinweg betrachtet wird und wir Anfangs- und Endzustand voneinander trennen, so ist klar, daß zum Anfangs- und Endzustand verschiedene Güterverteilungen gehören.Um also "Zwei-Phasen-Modelle" zu erhalten,die den Übergang vom Anfangs- zum Endzustand beschreiben,muß man in die Modelle zwei Güterverteilungen einbauen.Die im Anfangszustand vorliegende Güterverteilung werde mit q^a bezeichnet,die im Endzustand vorliegende mit q^e.

Wir können nun die bisher eingeführten Begriffe zu einer Struktur zusammenfassen,die als potentielles Modell der ökonomischen Vorgänge dienen kann und die zwei Phasen und somit die Möglichkeit eines Übergangs enthält.Die Struktur hat die Form

$$\langle J,G,p,q^a,q^e,U\rangle$$

q^a und q^e sind dabei,wie gesagt,vorzustellen als die am Anfang und am Ende der betrachteten Zeitspanne vorliegenden Güterverteilungen.Da eine solche Struktur möglicherweise (potentiell) ein Modell werden kann,wollen wir sie eine potentielle Tauschwirtschaft nennen.

<u>DII-1</u> a) x ist eine <u>potentielle Tauschwirtschaft</u> gdw es J,G,p,q^a,q^e und U gibt,sodaß

1) $x=\langle J,G,p,q^a,q^e,U\rangle$
2) $J=\{\pi_1,..,\pi_m\}$ ist eine endliche Menge (von Personen)
3) $G=\{\gamma_1,..,\gamma_n\}$ ist eine endliche Menge (von Güterarten)
4) $p:G\to\mathbb{R}^+$ (Preisfunktion)
5) $q^a:J\times G\to\mathbb{R}_0^+$ (Anfangsausstattung)
6) $q^e:J\times G\to\mathbb{R}_0^+$ (Endausstattung)
7) $U:J\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ist C^∞ (Nutzenfunktion)

b) Die Klasse aller potentiellen Tauschwirtschaften bezeichnen wir mit M_p(ÖKO)

Daß alle Preise positiv sind (DII-1a-4),impliziert den Ausschluß von "freien",im Übermaß vorhandenen "Gütern".Sie werden durch eine potentielle Tauschwirtschaft nicht erfaßt,denn ihr Preis ist Null.Daß U C^∞ ist (Bedingung a7),soll heißen: die Funktion U ist nach allen Argumenten,nach denen dies sinnvoll ist,unendlich oft partiell differenzierbar (ÜII-5).Diese rein technische Forderung stellt sicher,daß U in graphischer Darstellung eine "echte",glatte Kurve,ohne "Knicke" ist.

EINKOMMENSBESCHRÄNKUNG

Neben den Güterverteilungen q^a und q^e betrachten wir noch andere,"mögliche" Güterverteilungen q.Eine solche mögliche Güterverteilung q kann zustande kommen,wenn die in Verteilung q^a vorhandenen Gütermengen irgendwie umverteilt würden.Wie diese Umverteilung vonstatten geht,ob durch Tausch,durch Gewalt oder durch eine gute Fee,ist völlig egal.Nur sollen bei der Umverteilung die Gesamtmengen der vorhandenen Güter sich nicht ändern.

Zur Formulierung der ökonomischen Axiome brauchen wir zwei Hilfsbegriffe: Wert und Einkommensbeschränkung (abgekürzt durch EB).Der Wert der in π's Besitz befindlichen Güter hängt ab von deren Preisen und den Mengen,die π besitzt.Genauer ist der Wert dessen,was π an Gut γ besitzt,gleich dem Produkt aus dem Preis von γ und der Menge von γ ,die π besitzt.Der Gesamtwert aller in π's Besitz befindlichen Güter ist gerade die Summe der Werte der einzelnen Güterarten.In diese Definition des Gesamtwertes gehen als vorausgesetzt ein: eine Person, Preise,sowie eine individuelle Ausstattung (ÜII-6).

DII-2 Der Wert der Ausstattung von Person π zu Preisen p bei gegebener Güterverteilung q wird definiert durch

$$w_{\pi,p,q} := \sum_{\gamma=1}^{n} p(\gamma)q_{\pi}(\gamma)$$

Man beachte,daß die Ausstattung der Person π vollständig gegeben ist,wenn man die Verteilung q kennt.Die Ausstattung braucht deshalb nicht eigens als bekannt vorausgesetzt zu werden.

Hat π bei q^a eine bestimmte Anfangsausstattung q^a_{π} ,so kann man bei gegebenen Preisen verschiedene Variationen der Anfangsausstattung betrachten,die alle den gleichen Wert haben. Eine solche Variation kann aus q^a zustande kommen,indem π z.B.tauscht. π muß beim Tausch darauf achten,daß seine neue

Ausstattung q'_π nach dem Tausch den gleichen Wert hat,wie seine Anfangsausstattung q^a_π .Diese Wertbedingung ist automatisch erfüllt,wenn π beim Tausch keine Schulden und keinen Gewinn macht.Gibt π etwa eine bestimmte Menge von Gut γ ab und erhält dafür eine Menge von Gut γ',so muß der Wert beider Mengen bei gegebenen Preisen gleich sein.Denn sonst wären die Gesamtwerte von π's Ausstattung vor und nach dem Tausch verschieden (ÜII-7).

Die Einkommensbeschränkung EB besagt,daß nur Täusche zugelassen sind,die diese Wertbedingung erfüllen.Indem die EB Täusche mit Wertänderung ausschließt,zeichnet sie diejenigen Tauschmöglichkeiten positiv aus,bei denen der Wert erhalten bleibt.Man kann die EB also auch positiv formulieren: sie gibt bei bekannten Preisen p und bekannter Verteilung q für jede Person genau alle Tauschmöglichkeiten an,bei denen sich der Wert von π's Anfangsausstattung q^a_π nicht ändert.

BEISPIEL 3),Fortsetzung: Im Dorf Großmalum mögen die Hochleitnerin und die Moosbergerin Milch gegen Eier tauschen.Das Dutzend Eier koste einen Kreuzer und auch zwei Liter Milch mögen einen Kreuzer kosten.Tauschen dann beide zwölf Eier gegen zwei Liter Milch,so hat sich der Wert ihrer Ausstattung nicht verändert.Das gleiche gilt für den Tausch von 6 Eiern gegen einen Liter Milch oder 3 Eiern gegen 1/2 Liter Milch, oder 9 Eiern gegen 3/2 Liter Milch usw.Alle und genau die Täusche,bei denen im Mengenverhältnis 1 Stück zu 1/6 Liter getauscht wird,erfüllen die Einkommensbeschränkung (ÜII-8).

<u>DII-3</u> Sei x eine potentielle Tauschwirtschaft.

Die <u>Einkommensbeschränkung für</u> x wird definiert durch

$$EB_x := \{ q/q : J \times G \to \mathbb{R}_0^+ \text{ und für alle } \pi \in J: \sum_{\gamma=1}^{n} p(\gamma)[q^a_\pi(\gamma) - q_\pi(\gamma)] = 0 \}$$

In dieser positiven Definition der EB wird eine Menge möglicher Verteilungen q ausgezeichnet.Die definierende Bedingung an q lautet,wenn man die Summe in DII-3) aufspaltet:

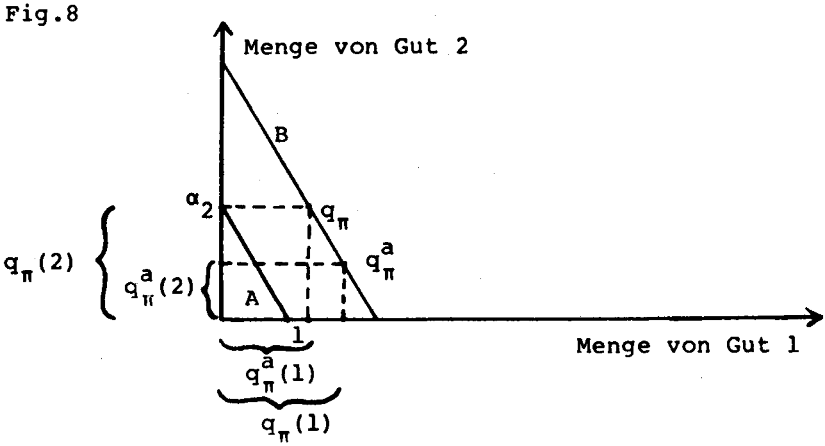
$$\sum_{\gamma=1}^{n} p(\gamma) q_\pi(\gamma) = \sum_{\gamma=1}^{n} p(\gamma) q^a_\pi(\gamma) \quad ,$$

oder, wenn wir DII-2) benutzen:

$$w_{\pi,p,q} = w_{\pi,p,q^a} \quad .$$

Sie lautet also, daß der Wert der Ausstattung von Person π zu Preisen p bei der Verteilung q (linke Seite) gleich ist dem Wert bei der Anfangsausstattung q_π^a. Diese Gleichheit muß für alle Personen π gelten. Die Einkommensbeschränkung kann man im Fall von zwei Gütern zeichnerisch darstellen. Wir betrachten eine Person und zwei Güter 1 und 2 mit gegebenen Preisen p(1) und p(2), sowie eine individuelle Ausstattung q_π^a (siehe Figur 8).

Fig.8



Auf den beiden Achsen sind die Mengen von Gut 1 und Gut 2 aufgetragen. Auf der 1-Achse ist eine Einheit von Gut 1 eingezeichnet. α_2 ist die Menge von Gut 2, die den gleichen Wert wie eine Einheit von Gut 1 hat, für die also gilt: $p(2)\alpha_2=p(1)\cdot 1$. Also ist α_2 gleich dem Preisverhältnis $p(1)/p(2)$. Die Gerade A, die durch die Punkte $\alpha_1=1$ und α_2 geht, hat die Steigung $-\alpha_2/\alpha_1= -\alpha_2$ und drückt damit das Preisverhältnis aus. Im Koordinatensystem gibt der Punkt q_π^a π's Anfangsausstattung an. Die Koordinaten dieses Punktes, $q_\pi^a(1)$ und $q_\pi^a(2)$, sind gerade die Mengen von Gut 1 und Gut 2, die π besitzt. B wird definiert als die Parallele zu A durch den Punkt q^a_π.Die möglichen Verteilungen,die der EB genügen,liegen genau auf der Geraden B. Einerseits erfüllt jeder Punkt auf B,z.B. q^a_π ,die EB,wenn für die nicht betrachteten Personen π: $q_\pi := q^a_\pi$ gesetzt wird.Andererseits muß jede Verteilung,die die EB erfüllt,also in der in DII-3) definierten Menge EB_x liegt,bezüglich der betrachteten Person auf B liegen (ÜII-9).

MODELLE

Wir können nun die Modelle der Theorie einführen.Dazu gehen wir von einer potentiellen Tauschwirtschaft aus und fordern, daß in dieser Struktur zusätzlich die Axiome der Theorie gelten.Dermaßen bereicherte Strukturen sind dann die Modelle der Tauschwirtschaft,weshalb wir eine solche Struktur auch eine Tauschwirtschaft nennen.(Die hier präsentierte Theorie,sowie auch viele der inhaltlichen Überlegungen,findet man mit einigen Änderungen auch in [Balzer,1982].)

DII-4 a) x ist eine Tauschwirtschaft gdw es J,G,p,q^a,q^e und U gibt,sodaß

1) $x = \langle J,G,p,q^a,q^e,U \rangle$
2) x ist eine potentielle Tauschwirtschaft
3) $q^e \in EB_x$ (vergleiche DII-3)
4) für alle $\pi \in J$ und für alle q: wenn $q \in EB_x$,dann ist

$$U_\pi(q_\pi(\gamma_1),\ldots,q_\pi(\gamma_n)) \leq U_\pi(q^e_\pi(\gamma_1),\ldots,q^e_\pi(\gamma_n))$$

b) Die Klasse aller Tauschwirtschaften bezeichnen wir mit M(ÖKO)

In dieser formalen Darstellungsweise sind die Axiome 3) und 4) zunächst etwas unzugänglich.Wir erläutern sie deshalb noch einmal intuitiv.

Axiom 3) fordert,daß q^e,also die Endverteilung,die EB in der Struktur x erfüllt.Das heißt im Hinblick auf DII-3),daß bei der Endverteilung q^e für alle Personen der Wert ihrer Ausstattung w_{π,p,q^e} der gleiche ist wie bei ihrer Anfangsausstattung.Für keine Person hat sich also in der betrachteten Zeitspanne der Wert ihrer Ausstattung,d.h.der Gesamtwert der in ihrem Besitz befindlichen Güter geändert.Dieses Axiom versteht man am besten in seiner ausschließenden Wirkung.Eine Änderung des Wertes der Ausstattung einer Person kann auf dreierlei Weisen stattfinden.Erstens kann die Person "übers Ohr gehauen" werden: sie "bezahlt" mehr als das,was sie dafür bekommt,wert ist.So etwas passiert oft,z.B. aufgrund mangelnder Information,wenn die Person die Konkurrenzangebote nicht kennt.Zweitens kann sich der Bestand ändern,ohne daß überhaupt getauscht wird.Zum Beispiel können Güter kaputtgehen,verderben,vergessen oder gestohlen werden (Verminderung des Bestandes),oder sie können neu produziert,gefunden oder gestohlen werden (Vermehrung des Bestandes).Drittens kann die Person den Wert ihres Bestandes durch Tausch vermehren,indem sie entweder Gewinn oder Schulden macht.Alle diese Möglichkeiten werden durch Bedingung 3) ausgeschlossen.Anders gesagt: wenn eine ökonomische Situation Täusche der gerade beschriebenen Art beinhaltet,dann kann sie nicht als Modell unserer Theorie auftreten.

Das vierte Axiom (DII-4a-4) beinhaltet die Nutzenmaximierung.Es fordert,daß der aus der Endverteilung q^e_π gezogene Nutzen maximal ist.Natürlich kann er nicht maximal im absoluten Sinne sein.Das würde einen unbegrenzten Gütervorrat voraussetzen.Er soll vielmehr maximal sein relativ zu den durch die EB noch zugelassenen Tauschmöglichkeiten.Das heißt: für alle möglichen Verteilungen,die die EB erfüllen ($q \in EB_x$) darf der aus q gewonnene Nutzen höchstens so groß sein wie der aus q^e gewonnene.Noch anders: der aus der Verteilung q^e gezogene Nutzen ist maximal unter allen anderen möglichen Verteilungen $q \in EB_x$.Diese Forderung soll für alle Personen π gelten.Hier spielt die EB wieder eine wesentliche Rolle.Nur wenn man die Maximalitätsforderung auf die Menge EB_x einschränkt,ist sie überhaupt sinnvoll.Für eine Person π bedeutet die Einschränkung,daß π seinen Nutzen maximiert relativ zu den ihm offenstehenden Alternativen.Diese sind gerade durch die EB vorgegeben.Alternativen,die die EB nicht erfüllen,dürfen in der vorliegenden Theorie nicht betrachtet werden.Wenn man sie einbeziehen will,muß man eine Erweiterung der Theorie vornehmen.

Die Axiome heben den Punkt q^e, also die Güterverteilung im Endzustand, besonders hervor. Die Verteilung q^e hat, wenn alle Axiome erfüllt sind, mehrere schöne Eigenschaften, auf die wir gleich zu sprechen kommen. Wir nennen q^e im folgenden <u>Gleichgewichtsverteilung</u> und die Redewendung "im Gleichgewicht" bedeutet, daß wir uns auf eine Gleichgewichtsverteilung q^e beziehen (ÜII-10).

THEOREME

Um mit den Modellen etwas vertrauter zu werden, wollen wir einige bekannte Theoreme formulieren, die in Tauschwirtschaften beweisbar sind. Wir betrachten eine Tauschwirtschaft $x=\langle J,G,p,q^a,q^e,U\rangle$.

<u>DII-5</u> Sei $\pi \in J$, $\gamma_i \in G$ und $q \in EB_x$. Der <u>Grenznutzen</u> $\Delta_i U_\pi(q_\pi(\gamma_1),\ldots,q_\pi(\gamma_n))$ <u>von Gut</u> γ_i <u>für</u> π <u>bei Verteilung</u> q_π ist definiert als diejenige Nutzenänderung, die sich für π aus dem Mehrkonsum einer Einheit von Gut γ_i ergibt, d.h. $\Delta_i U_\pi(q_\pi(\gamma_1,\ldots,q_\pi(\gamma_n)) :=$

$$U_\pi(q_\pi(\gamma_1),\ldots,q_\pi(\gamma_{i-1}),q_\pi(\gamma_i)+1,q_\pi(\gamma_{i+1}),\ldots,q_\pi(\gamma_n)) - U_\pi(q_\pi(\gamma_1),\ldots,q_\pi(\gamma_n))$$

Dabei ist Nutzenänderung aufgefaßt als Differenz des Nutzens, der aus der größeren und der kleineren Gütermenge gezogen wird wird.

<u>DII-6</u> Sei $\pi \in J$, γ_i, $\gamma_j \in G$ und $q \in EB_x$. Die <u>Substitutionsrate von</u> π für <u>Güter</u> γ_i <u>und</u> γ_j <u>bei Verteilung</u> q ist definiert als

$$\mathrm{SUBSTR}(\pi,i,j,q) := \frac{\Delta_i U_\pi(q_\pi(\gamma_1),\ldots,q_\pi(\gamma_n))}{\Delta_j U_\pi(q_\pi(\gamma_1),\ldots,q_\pi(\gamma_n))}$$

Die Substitutionsrate ist das Verhältnis der Grenznutzen der beiden fraglichen Güter γ_i und γ_j. Ist es größer als 1, so bringt eine Einheit von Gut γ_i mehr Nutzen als eine Einheit von γ_j. Das umgekehrte gilt, wenn die Substitutionsrate kleiner als 1 ist. Die Substitutionsrate kann auch zur Bestimmung benutzt werden, welche Menge von Gut γ_j nötig ist, um den Verlust einer Einheit von γ_j nutzenmäßig auszugleichen.Das geht natürlich nur unter besonderen Bedingungen.Nimmt man z.B.einem Baby einen Lutscher weg,so kann man den entstehenden Nutzenverlust schwerlich mit irgendeiner Menge der Güterart "Autoreifen" wieder ausgleichen.Dies geht nur,wenn beide Güter, wie man sagt,für einander substituierbar sind.

Mit Hilfe der gerade definierten Begriffe lassen sich nun einige bekannte Theoreme hinschreiben.Sie sind in der vorliegenden Form nur näherungsweise richtig.Eine genaue Formulierung und Beweise finden sich in (ÜII-11).

TII-1 Sei $x=\langle J,G,P,q^a,q^e,U\rangle$ eine Tauschwirtschaft und für alle $\pi\in J$ und $\gamma\in G$ gelte $q^e(\pi,\gamma)>0$.

a) Zu jedem $\pi\in J$ gibt es eine Zahl δ ,sodaß für alle $\gamma_i\in G$ gilt:

$$\Delta_i U_\pi(q_\pi(\gamma_1),\ldots,q_\pi(\gamma_n)) = \delta\cdot p(\gamma_i)$$

b) Für alle $\pi,\pi'\in J$ und alle $\gamma_i, \gamma_j\in G$:

$$\mathrm{SUBSTR}(\pi,i,j,q^e)=\mathrm{SUBSTR}(\pi',i,j,q^e)=\frac{p(\gamma_i)}{p(\gamma_j)}$$

c) Unter Voraussetzungen,die rein mathematischer Natur sind, ist q^e durch p in x eindeutig bestimmt

TII-1a) besagt,daß für alle Personen π und alle Güter γ_i der Grenznutzen von γ_i für Person π proportional zum Preis von γ_i ist.Mit anderen Worten: um den Grenznutzen herauszufinden, braucht man im Gleichgewicht nicht den Geschmack,die Präferenz und die Charaktereigenschaften zu untersuchen,sondern einfach nur die Preise festzustellen.TII-1b) sagt aus,daß im Gleichgewicht die Substitutionsraten durch die Preisverhältnisse gegeben sind.Da die Preise für alle Personen die gleichen sind,sind auch die Substitutionsraten zwischen je zwei Gütern für alle Personen gleich.TII-1c) ist ein mathematisch ziemlich komplizierter Satz.Er besagt,daß,wenn die Nutzenfunktion einige mathematisch schöne Eigenschaften hat,die Gleichgewichtsverteilung q^e schon dann festliegt,wenn man die Preise kennt. Das heißt genauer: wenn in einer Tauschwirtschaft J,G,p,q^a und U gegeben sind und U noch mathematische Zusatzvoraussetzungen erfüllt,dann kann man aus der Annahme,daß q eine Gleichgewichtsverteilung (d.h. daß $\langle J,G,p,q^a,q,U\rangle$ eine Tauschwirtschaft) ist, eindeutig berechnen, wie q aussehen muß.

Wir haben TII-1c) hier aufgeschrieben, weil es für die Anwendung der Theorie sehr wichtig ist. Mit Hilfe von TII-1c) kann man nämlich Voraussagen machen. Dies geschieht folgendermaßen. Man betrachtet ein ökonomisches System, von dem vorausgesetzt wird, daß seine Nutzenfunktionen die angesprochenen mathematischen Zusatzbedingungen erfüllen. (Diese Bedingungen sind z.B. bei konvexen Funktionen, die weiter unten definiert werden, erfüllt.) Weiter wird vorausgesetzt, daß das System eine Tauschwirtschaft bildet. Man braucht nun in diesem System nur die Preise, die Anfangsverteilung und die Nutzenfunktion zu kennen. Aus diesen drei Größen läßt sich mit Hilfe von TII-1c) und den Axiomen die Gleichgewichtsverteilung q^e berechnen. q^e enthält aber gerade Information über die Gütermengen im Endzustand, d.h. über die Gütermengen nach dem Tausch. Diese Gütermengen lassen sich also mittels TII-1c) vorhersagen. Wenn man die Differenzen zwischen q^e und q^a bildet, so erhält man die Gütermengen, die die Personen kaufen und verkaufen werden, oder mit anderen Worten, die sie anbieten und nachfragen. Mit TII-1c) lassen sich also Angebot und Nachfrage vorhersagen (ÜII-12), (ÜII-13).

Es ist von der Wissenschaftstheorie her befriedigend, wenn man die logische Unabhängigkeit der benutzten Grundbegriffe beweisen kann. Damit ist gewährleistet, daß jeder der Begriffe tatsächlich gebraucht wird und sich nicht z.B. durch Definition als überflüssig nachweisen läßt. Natürlich können die Grundmengen J und G von den anderen Begriffen nicht unabhängig sein, denn sie tauchen als Definitionsbereiche der Funktionen p, q und U auf. Unabhängigkeit kann sinnvoll nur bei den Funktionen untersucht werden.

Um zu verstehen, was logische Unabhängigkeit überhaupt ist, nehmen wir an, daß ein Begriff, z.B. p, von den restlichen logisch abhängig sei. Das kann nur heißen, daß p festgelegt ist, wenn die anderen Begriffe festgelegt sind. Anders gesagt: wenn $\langle J,G,p,q^a,q^e,U\rangle$ eine Tauschwirtschaft ist, dann gibt es bei gegebenen J,G,q^a,q^e und U keine andere Preisfunktion p' mit $p \neq p'$, sodaß $\langle J,G,p',q^a,q^e,U\rangle$ ebenfalls eine Tauschwirtschaft ist.Oder anders:

Wenn $<J,G,p,q^a,q^e,U>$ eine Tauschwirtschaft ist und ebenso $<J,G,p',q^a,q^e,U>$,dann ist $p=p'$.

Aus dieser Definition der logischen Abhängigkeit ergibt sich sofort eine Methode,die logische Unabhängigkeit nachzuprüfen. Die Preisfunktion p beispielsweise ist unabhängig von den restlichen Begriffen,wenn es zwei verschiedene Preisfunktionen gibt,die mit gegebenen anderen Begriffen zusammen zwei verschiedene Tauschwirtschaften bilden.

DII-7 Die Preisfunktion p ist in der Tauschwirtschaft von q^a,q^e und U unabhängig gdw es p,p',J und G gibt,sodaß
$<J,G,p,q^a,q^e,U> \in M(\text{ÖKO})$,
$<J,G,p',q^a,q^e,U> \in M(\text{ÖKO})$ und
$p \neq p'$

Analog ist die logische Unabhängigkeit für die anderen Begriffe q^a,q^e und U definiert.Wir können nun beweisen:

TII-2 Jede der Größen p,q^a,q^e,U ist in der Tauschwirtschaft von den je drei übrigen Größen logisch unabhängig (ÜII-14).

GELD

In der bisherigen Darstellung wurde Geld stets als eine spezielle Güterart behandelt.Das ist nicht selbstverständlich, Geld hat zweifellos eine Sonderstellung.Man kann es nicht konsumieren,wie andere Güterarten (außer indem man à la Dagobert Duck darin badet) und der Nutzen,der sich aus dem Besitz von Geld ergibt,wirkt anders als bei anderen Gütern.Auch könnte man meinen,daß Geld in der heute üblichen Form von Banknoten in beliebiger Menge herstellbar sei und deshalb einen anderen Status haben müsse als die restlichen "knappen" Güter.Aber es ist klar,daß auch die Geldmenge heute von den dafür zuständigen Stellen knapp gehalten wird.In früheren Zeiten,als z.B. mit Gold bezahlt wurde,war Geld den anderen Gütern noch ähnlicher,denn man konnte sich den Wert des Goldes vorstellen als die Arbeit,die nötig war,es zu schürfen.

Es würde sich jedoch an der Theorie nichts ändern,wenn man Geld als Güterart ausschließt.Man erhält dann eine "reine" Tauschwirtschaft.In einer solch reinen Tauschwirtschaft kann man nachträglich ein bestimmtes Gut als "Geld" auszeichnen.Der Preis dieses Gutes wird in natürlicher Weise gleich 1 gesetzt. (Nebenbei bemerkt haben wir in Tauschwirtschaften dies nicht gefordert.Es kann also durchaus vorkommen,daß in unseren Modellen Geld einen von 1 verschiedenen Preis hat.)

Wir gehen hier nicht näher auf die Sonderrolle des Geldes ein,sondern bemerken nur,daß viele ökonomische Mechanismen, die bei uns ausgeschlossen wurden,erst in Verbindung mit Geld funktionieren: Schulden,Zinsen,Kredit usw. All diese Effekte sind bei uns,wie schon erläutert,durch die EB ausgeschlossen. Um sie zu behandeln,muß man eine Erweiterung der hier geschilderten Theorie vornehmen.

SPEZIALISIERUNGEN

In einer Tauschwirtschaft ist die Nutzenfunktion nicht näher spezifiziert.Man sieht es daran,daß ihre mathematische Form weitgehend unbestimmt ist.Wir sagten am Anfang dieses Kapitels,daß man die Nutzenfunktion in einer konkreten Situation jeweils spezifizieren kann,indem man angibt,aus welchen Faktoren sich der Nutzen zusammensetzt und wie die Faktoren gewichtet sind.Daraus folgt aber noch nicht,daß auch die mathematische Form der Nutzenfunktion schon völlig festgelegt ist,denn die mathematische Form enthält ein quantitatives Element,das "gemessen" werden muß und nicht durch Analyse einer Situation aufzufinden ist.Wir betrachten jetzt einige mathematische Festlegungen,von denen man annahmen kann,daß sie in vielen Fällen zutreffen.Man kann diese Festlegungen auch als Spezialisierungen der Nutzenfunktion bezeichnen."In vielen Fällen" heißt aber nicht "in allen Fällen".Für jede der folgenden Festlegungen kann man sich Situationen ausdenken,in denen die so festgelegte Nutzenfunktion nicht adäquat ist.

a) Markträumung

Eine erste Spezialisierung besteht darin, neben den bisherigen Axiomen noch zu fordern, daß in Modellen "alle Märkte geräumt" werden. Damit ist folgendes gemeint. Vor und nach dem Tausch soll die Gesamtmenge eines Gutes, so wie sie in den Verteilungen q^a und q^e enthalten ist, gleich sein. Die in q^a enthaltene Gesamtmenge von γ_i z.B. ist einfach $\sum_{\pi \in J} q^a(\pi, \gamma_i)$, also die Summe aller Mengen, die sich im Besitz der verschiedenen Personen befinden. Die Forderung der Markträumung lautet dann formal

$$\text{für alle } \gamma_i \in G: \sum_{\pi \in J} q^a(\pi, \gamma_i) = \sum_{\pi \in J} q^e(\pi, \gamma_i).$$

Um die Bezeichnung "Markträumung" zu verstehen, machen wir uns zunächst klar, daß für ein fest gewähltes Gut γ_i der "Markt für" γ_i gerade aus allen Täuschen besteht, in denen es um γ_i geht. Ist für eine Person π :

$$Na(\pi,i) := q^e(\pi, \gamma_i) - q^a(\pi, \gamma_i) > 0,$$

so hat π nach dem Tausch mehr von Gut γ_i als vorher, π hat also eine gewisse Menge von γ_i <u>nachgefragt</u> und gekauft, nämlich die Menge $Na(\pi,i)$. Ist

$$An(\pi,i) := q^a(\pi, \gamma_i) - q^e(\pi, \gamma_i) > 0,$$

so hat π von Gut γ_i etwas angeboten und verkauft, nämlich die Menge $An(\pi,i)$, denn π's Bestand nach dem Tausch ist kleiner als vorher. Wollen wir nun von den individuellen Angeboten zum Gesamtangebot übergehen, so liegt es nahe, dies einfach als Summe der individuellen Angebote zu definieren.

> Das <u>Gesamtangebot an</u> γ_i ist definiert als
> $An_i := \sum_{\pi} An(\pi,i)$, wobei nur über solche π zu summieren ist, für die $An(\pi,i) > 0$

Genauso kann man die Gesamtnachfrage nach γ_i definieren.

> Die <u>Gesamtnachfrage nach</u> γ_i ist definiert als
> $Na_i := \sum_{\pi} Na(\pi,i)$, wobei nur über solche π mit $Na(\pi,i) > 0$ summiert wird

Unsere obige Forderung läuft dann gerade darauf hinaus,daß für jedes Gut γ_i die Gesamtnachfrage nach γ_i gleich dem Gesamtangebot an γ_i ist (ÜII-15).Das erklärt aber auch die Bezeichnung.Wenn Gesamtangebot und Gesamtnachfrage auf einem Markt gleich sind,dann erfolgt ein Tausch "ohne Rest",d.h.es gibt kein Überangebot und keine überschüssige Nachfrage.Jedes angebotene Gut findet einen Käufer und jedes nachgefragte Gut einen Anbieter.Man kann sagen,der Markt für dieses Gut sei geräumt.Bei einem nicht geräumten Markt sind Gesamtangebot und Gesamtnachfrage verschieden.Nehmen wir z.B.an,das Gesamtangebot sei größer als die Nachfrage.Dann gehen einige Anbieter nach dem Tausch mit Gütern,die sie zum Verkauf auf den Markt mitgebracht hatten,wieder nach Hause.(Die natürliche Reaktion, die Güter zu niedrigeren Preisen anzubieten,ist in den Modellen unserer Theorie nicht erfaßbar.)

DII-8 $x=\langle J,G,p,q^a,q^e,U\rangle$ ist eine Tauschwirtschaft mit Markträumung gdw

1) $x \in M(ÖKO)$

2) für alle $\gamma_i \in G$: $\sum_{\pi \in J} q^a(\pi,\gamma_i) = \sum_{\pi \in J} q^e(\pi,\gamma_i)$

Diese erste Spezialisierung ist nicht von der oben genannten Art,indem sie nicht direkt die Form von U betrifft.Sie nimmt insofern eine gewisse Sonderstellung ein,was noch dadurch verstärkt wird,daß sie in fast allen Lehrbüchern zusammen mit den Grundaxiomen genannt wird.Es wäre zu überlegen,ob man sie nicht als Axiom für alle Modelle von M(ÖKO) aufstellen soll. Aber andererseits gibt es Fälle,wo tatsächlich nach dem Tausch noch Ware vorhanden ist oder mehr nachgefragt wird,als da ist. Jeder,der auf einem Wochenmarkt war,kennt die erste Situation und auch die zweite ist denen,die weniger fette Zeiten gesehen haben,bekannt.Man würde solche Situationen von vornherein als durch die Theorie nicht behandelbar ausschließen,wollte man DII-8-2) allgemein für alle Modelle fordern.Es scheint uns hier adäquater,auch diese Situationen als Modelle der Theorie zu erfassen und die Markträumung als eine im Rahmen der Theorie speziellere Situation anzusehen.Wir betonen,daß die übliche Vorstellung einer Preisänderung infolge von überschüssigem Angebot oder überschüssiger Nachfrage hier nicht behandelt werden kann.Dazu braucht man eine andere Theorie, denn in Modellen der hier behandelten Theorie gibt es nur einen Preis und dieser ist vor und nach dem Tausch derselbe. Man kann darauf sagen,daß diese Theorie dann nicht besonders interessant und brauchbar sei.Aber der Vorwurf geht nicht an die Adresse des Wissenschaftstheoretikers,der die Theorie so untersucht,wie sie von den Ökonomen gemacht wird.Der Vorwurf geht an die Ökonomie.

b) "normale" Nutzenfunktion

Sei $x=\langle J,G,p,q^a,q^e,U\rangle$ eine Tauschwirtschaft und $\pi \in J$. π's Nutzenfunktion hat normale Form,wenn der Nutzen mit größer werdenden Gütermengen wächst.Da die n-Tupel der Argumente von U nicht vollständig geordnet sind (ÜII-16),müssen wir eine der möglichen Formulierungen willkürlich auswählen.

<u>DII-9</u> U hat <u>normale Form</u> gdw für alle $\pi \in J$ und $\gamma_i \in G$ und alle $\alpha_1,..,\alpha_n \in \mathbb{R}$:

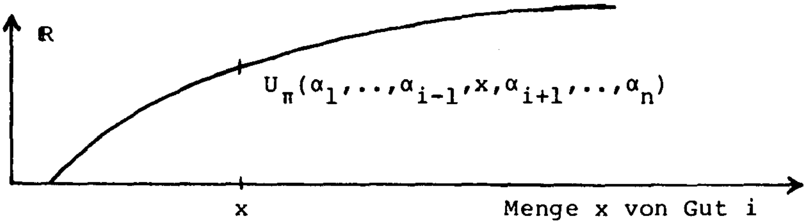
$$\Delta_i U_\pi(\alpha_1,..,\alpha_n) \geq 0$$

Im Hinblick auf die Definition von $\Delta_i U_\pi$ (DII-5) heißt das

$$U_\pi(\alpha_1,..,\alpha_n) \leq U_\pi(\alpha_1,..,\alpha_{i-1},\alpha_i+1,\alpha_{i+1},..,\alpha_n).$$

Eine durch $\alpha_1,..,\alpha_n$ gegebene Ausstattung ist in klarer Weise "kleiner" als eine durch $\alpha_1,..,\alpha_{i-1},\alpha_i+1$ $\alpha_{i+1},..,\alpha_n$ gegebene Ausstattung.Die letztere enthält ja von Gut γ_i eine Einheit mehr,während sie in allen anderen Gütern mit der ersten übereinstimmt.Zeichnet man den Nutzen in Abhängigkeit von einer Güterart,d.h.bei festen Mengen der übrigen Güterarten,so ergibt sich folgendes Bild (Figur 9).

Fig.9



Die Tauschwirtschaften mit normaler Nutzenfunktion bilden eine Klasse von Strukturen,die mit M_1 bezeichnet werde.

DII-10 a) x ist eine Tauschwirtschaft mit normaler Nutzenfunktion gdw es J,G,p,q^a,q^e,U gibt,sodaß

1) $x=\langle J,G,p,q^a,q^e,U\rangle$
2) x ist eine Tauschwirtschaft
3) U hat normale Form

b) M_1(ÖKO) bezeichnet die Klasse aller Tauschwirtschaften mit normaler Nutzenfunktion.

Eine Tauschwirtschaft mit normaler Nutzenfunktion wird zwar sehr oft,aber nicht immer gegeben sein.Als Gegenbeispiel denke man etwa an eine Person,deren Nutzen in Abhängigkeit von der Menge an konsumierter Eiskrem variiert.Selbst bei größter Hitze wird nach dem "Genuß" von 50 Portionen Eiskrem der Nutzen durch den Konsum einer weiteren Portion nicht wachsen, sondern eher abnehmen: der Person wird schlecht.Oder man denke an Güter,deren Lagerung sehr aufwendig ist.Einem durchschnittlichen Familienvater wird sich die Nutzenfunktion durch ein, zwei oder drei tiefgefrorene Schweinehälften erhöhen,nicht jedoch durch 500 solcher Schweinehälften,selbst wenn sie ihm geschenkt werden.Der Mann kann sie weder verzehren,noch lagern. Er hat nur Ärger mit ihnen.

Der normale Nutzenzuwachs beinhaltet eine ziemlich schwache Spezialisierung der Nutzenfunktion,denn es gibt zahllose verschiedene Nutzenfunktionen,die diese Eigenschaft haben (ÜII-17).Die Spezialisierung wird aber dadurch nicht uninteressant.Sie trifft auf viele verschiedene individuelle Nutzenfunktionen zu und hat so einen gesetzesartigen Charakter.Alle Elemente von M_1(ÖKO) sind per Definition Tauschwirtschaften, sodaß M_1(ÖKO) Teilmenge der Klasse M(ÖKO) aller Tauschwirtschaften ist.Die Spezialisierung der Nutzenfunktion drückt sich so,wenn wir über Mengen von Strukturen reden,durch den Übergang zu einer Teilmenge der ursprünglich betrachteten Menge von Strukturen aus.Solche Übergänge lassen sich wiederholen.Durch eine weitere Spezialisierung der eben gemachten Spezialisierung der Nutzenfunktion erhalten wir eine Teilmenge M_2 von M_1(ÖKO),d.h.

$$M_2 \subseteq M_1(\text{ÖKO}) \subseteq M(\text{ÖKO})$$

Die Spezialisierungsrelation,die in dieser allgemeinen Form als Teilmengenrelation zwischen Strukturklassen dargestellt wird,ist wissenschaftstheoretisch von großer Wichtigkeit.Sie tritt in fast allen Theorien auf und die meisten Theorien werden erst dadurch zu echten empirischen Theorien,daß sie geeignete nicht-triviale Spezialisierungen zulassen.Aus diesem Grund halten wir die Beziehung zwischen M(ÖKO) und M_1(ÖKO) in Form eines Theorems explizit fest.

TII-3 Die Tauschwirtschaften mit normaler Nutzenfunktion bilden eine Spezialisierung der Tauschwirtschaften, d.h. $M_1(\text{ÖKO}) \subseteq M(\text{ÖKO})$

Eine weitere Spezialisierung ist das

c) Gesetz vom abnehmenden Grenznutzen

Es besagt intuitiv,daß der Nutzenzuwachs,der sich aus Mehrbesitz bzw.Mehrkonsum ergibt,umso kleiner ist,je größer die schon vorhandene Menge,zu der er hinzukommt.Der Nutzenzuwachs, den ein Durchschnittsverdiener aus dem Gewinn von DM 5ooo.- zieht,ist größer als der Zuwachs,den der gleiche Mensch aus dem Gewinn von DM 5ooo.- zieht,nachdem er vorher im Lotto 1,5 Millionen gewonnen hat.Für eine genaue Formulierung genügt es,einen Mengenzuwachs um je eine Einheit zu betrachten.

DII-11 a) Eine Tauschwirtschaft $x=\langle J,G,p,q^a,q^e,U\rangle$ erfüllt das Gesetz vom abnehmenden Grenznutzen gdw

1) x ist eine Tauschwirtschaft mit normaler Nutzenfunktion

2) für alle $\pi \in J$, $\gamma_i \in G$ und $\alpha_1,..,\alpha_n \in \mathbb{R}$:

$$\Delta_i U_\pi(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_i+1,..,\alpha_n) \leqq \Delta_i U_\pi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$$

b) x ist eine Tauschwirtschaft mit abnehmendem Grenznutzen gdw es J,G,p,q^a,q^e und U gibt,sodaß

1) $x=\langle J,G,p,q^a,q^e,U\rangle$

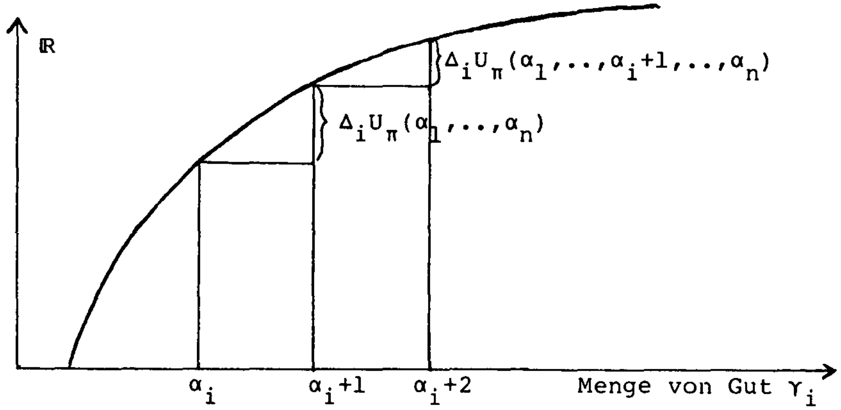
2) x ist eine Tauschwirtschaft

3) x erfüllt das Gesetz vom abnehmenden Grenznutzen

c) M_2(ÖKO) bezeichnet die Klasse aller Tauschwirtschaften mit abnehmendem Grenznutzen

Mit Hilfe des Grenznutzens läßt sich DII-11a-2) wie folgt ausdrücken. Der Grenznutzen, den π bei Besitz der Mengen $\alpha_1,..,\alpha_{i-1},\alpha_i+1,\alpha_{i+1},..,\alpha_n$ aus einer zusätzlichen Einheit von Gut γ_i zieht, ist nicht größer (sondern $\leq$) als der Grenznutzen, den π im Besitz der Mengen $\alpha_1,..,\alpha_n$ aus einer zusätzlichen Einheit von γ_i zieht. Oder noch anders: der Nutzenzuwachs relativ zu den schon vorhandenen Mengen $\alpha_1,..,\alpha_i+1,..,\alpha_n$ ist kleiner oder gleich dem Nutzenzuwachs relativ zu den Mengen $\alpha_1,..,\alpha_n$. Durch Festhalten der von γ_i verschiedenen Gütermengen und Aufzeichnen des Nutzens in Abhängigkeit von der Menge γ_i erhalten wir folgendes Bild (Figur 10).

Fig.10



Der Nutzenzuwachs (oder Grenznutzen), der beim Niveau α_i ansetzt, ist größer oder gleich dem Nutzenzuwachs, der beim Niveau α_i+1 ansetzt. Aus DII-11) ergibt sich unmittelbar

<u>TII-4</u> $M_2(\text{ÖKO}) \subseteq M_1(\text{ÖKO})$

Eine mathematisch äquivalente Charakterisierung des Gesetzes vom abnehmenden Grenznutzen macht Gebrauch vom Begriff der Konvexität, der sich als elegantes und weitreichendes Hilfsmittel in der Ökonomie erwiesen hat. Zugleich können wir uns mit dieser Umformulierung von den mathematischen Problemen befreien, die durch Benutzung der Differenzen Δ_i auftreten.

> Die Nutzenfunktion $U_\pi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt <u>streng konvex</u>, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:
> für alle $\mathcal{X}, \mathcal{X}' \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{X} \neq \mathcal{X}'$ und alle $\alpha \in]0,1[$ gilt:
> $\alpha U(\mathcal{X}) + (1-\alpha)U(\mathcal{X}') < U(\alpha\mathcal{X} + (1-\alpha)\mathcal{X}')$

Im Fall n=1 läßt sich U wie in Figur 10) veranschaulichen. $\mathcal{X}$ und $\mathcal{X}'$ sind in diesem Fall reelle Zahlen. $\alpha\mathcal{X}+(1-\alpha)\mathcal{X}'$ ist eine Zahl, die "zwischen" $\mathcal{X}$ und $\mathcal{X}'$ liegt. Genauso ist $\alpha U(\mathcal{X})+(1-\alpha)U(\mathcal{X}')$ eine Zahl, die zwischen den Funktionswerten $U(\mathcal{X})$ und $U(\mathcal{X}')$ liegt. Man nennt diese Zahlen auch <u>konvexe Kombinationen</u>, einmal der Argumente und im zweiten Fall der Funktionswerte. Die Ungleichung besagt dann, daß die konvexe Kombination zweier Funktionswerte kleiner ist als die entsprechende konvexe Kombination (d.h. die Kombination mit gleichem α) der Argumente, bei denen die Funktionswerte gebildet sind. Man kann beweisen, daß diese Bedingung mit folgender anschaulicher Bedingung äquivalent ist. Zu je zwei Funktionswerten liegt die durch sie hindurchgehende Sehne immer ganz "unter" dem Graphen der Funktion (ÜII-18).

d) ein mathematisches Beispiel

Durch die vorhergehenden Gesetze ist die mathematische Form der Nutzenfunktion noch nicht eindeutig festgelegt. Betrachten wir die mathematische Funktion

$$U_\pi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \log(\alpha_i)$$

Für speziell gewählte Zahlen β_i, z.B. $\beta_1=\beta_2=\ldots=\beta_n=1$ ist hierdurch die Form der Nutzenfunktion völlig festgelegt. Wenn in einer Tauschwirtschaft die Person π eine solche Nutzenfunktion hat, dann läßt sich π's Nutzen <u>berechnen</u>, wenn man die Gütermengen kennt, die π besitzt.

Diese Definition der Nutzenfunktion ist zwar zunächst willkürlich, jedoch nicht ganz absurd. Es gilt nämlich

<u>TII-5</u> Ist x eine Tauschwirtschaft und sind alle U_π von der gerade angegebenen Form, so erfüllt x das Gesetz vom normalen Nutzenzuwachs und das Gesetz vom abnehmenden Grenznutzen

e) die Stone-Geary-Nutzenfunktion

Sie hat eine nur wenig speziellere Form als die unter d) betrachtete mathematische Funktion.

DII-12 a) Sei $x=\langle J,G,p,q^a,q^e,U\rangle$ eine Tauschwirtschaft und $\pi \in J$. U_π heißt Stone-Geary-Nutzenfunktion für π gdw es $\beta_1,..,\beta_n$ und $\delta_1,..,\delta_n$ gibt, sodaß für alle $\alpha_1,..,\alpha_n \in \mathbb{R}$:

$$U_\pi(\alpha_1,..,\alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot \log(\alpha_i - \delta_i)$$

b) x ist eine Stone-Geary-Tauschwirtschaft gdw es J,G,p,q^a, q^e und U gibt, sodaß

1) $x=\langle J,G,p,q^a,q^e,U\rangle$
2) x ist eine Tauschwirtschaft
3) für alle $\pi \in J$ ist U_π eine Stone-Geary-Nutzenfunktion

c) M_3(ÖKO) sei die Klasse aller Stone-Geary-Tauschwirtschaften

Dabei geben die Konstanten $\delta_1,..,\delta_n$ an, wieviel vom jeweiligen Gut Person π mindestens haben muß, um überhaupt leben zu können. Besitzt π von γ_i weniger als δ_i, so kann π nicht existieren. Für derartige Ausstattungen ist U_π nicht definiert. Die Konstanten $\beta_1,..,\beta_n$ geben die Gewichte an, mit denen die verschiedenen Güterarten in die Nutzenfunktion eingehen.

Stone-Geary-Nutzenfunktionen sind erstens intuitiv plausibel (sie erfüllen die beiden obigen Spezialgesetze) und sie spielen zweitens in der Theorie eine ausgezeichnete Rolle. Sie sind nämlich nachweislich die einzigen Nutzenfunktionen, für die die Gleichgewichtsverteilung q^e linear von den Preisen (vergleiche TII-1c) und auch von den Einkommen abhängt. Sie ergeben sich auch als die zu ökonometrischen linearen Nachfragesystemen gehörigen Nutzenfunktionen. Diese beiden letzten Punkte können hier nicht näher erläutert werden, wir verweisen auf [Stone, 1954].

TII-6 $M_3(\text{ÖKO}) \subseteq M_2(\text{ÖKO})$

MESSUNG

Wir wenden uns nun der Frage zu,wie man die verschiedenen Größen der Tauschwirtschaft messen kann.Das Ziel dabei ist, herauszufinden,welche dieser Größen (Terme) theoretisch sind. In Kap.I hatten wir folgendes Theoretizitätskriterium eingeführt.Term $\bar{t}$ ist theoretisch bezüglich Theorie T,wenn jede Bestimmungsmethode für $\bar{t}$ Modelle von T liefert.Da in der Tauschwirtschaft alle relevanten Terme quantitative Funktionen sind -d.h.Funktionen,die Zahlen als Werte annehmen- können wir statt von Bestimmungsmethoden schärfer von <u>Meßmethoden</u> reden.Im Gegensatz zu Bestimmungsmethoden,bei denen nur über das Vorliegen bzw. Nicht-Vorliegen einer Beziehung entschieden wird,liefert eine Meßmethode aus einem Kontinuum von möglichen Werten einen ganz bestimmten Meßwert in Form einer Zahl.Auch die Formulierung,daß eine Bestimmungsmethode Modelle der Theorie liefert,wollen wir etwas verändern.Bei Meßmethoden wollen wir dafür sagen,sie seien theorieabhängig.Die Theorieabhängigkeit einer Meßmethode bedeutet,daß bei Durchführung der Messung ein konkretes System entsteht,dessen Beschreibung ein Modell der Theorie ist oder dessen Beschreibung die Existenz eines (eventuell anderen) Modells der Theorie impliziert.In dieser neuen Terminologie lautet dann das Theoretizitätskriterium: Term $\bar{t}$ ist T-theoretisch,wenn jede Meßmethode für $\bar{t}$ T-abhängig ist.Um dies für die verschiedenen Größen der Tauschwirtschaft zu untersuchen,fragen wir uns,wie man sie messen kann.Bei J,G und q^a ist die Antwort klar.Man kann -jedenfalls in einigen Fällen- ohne Hilfe der Tauschwirtschaft feststellen,ob etwas eine Person ist oder eine Güterart,indem man auf Alltagswissen zurückgreift.Ebenso kann man oft feststellen,welche Mengen einer Güterart sich im Besitz einer bestimmten Person befinden,indem man entweder einfach zählt oder bekannte physikalische Verfahren zur Massen- oder Gewichtsmessung anwendet. (Wir sehen davon ab,daß es auch schwierig sein kann,zu klären,ob sich eine Gütermenge in juristischem Sinn im Besitz einer Person befindet.) Diese Meßverfahren sind insoweit unproblematisch,als sie nichts mit der

Tauschwirtschaft zu tun haben.Wir können,um Größen für die Tauschwirtschaft auf diese Art zu messen,die Alltagserfahrung oder andere,von der Tauschwirtschaft verschiedene Theorien voraussetzen.J,G und die Güterverteilungen sind daher ÖKO-nicht-theoretisch,denn <u>es gibt</u> ÖKO-unabhängige Meßmethoden für sie.

Weniger klar ist die Situation bei den Preisen.Die einfachste Meßmethode für Preise besteht darin,die Personen zu befragen.Es kann aber sein,daß verschiedene Personen verschiedene Preise für ein Gut angeben.Diese "Meßmethode" liefert dann keinen eindeutigen Wert.Man wird hier kaum von Messung sprechen können,denn ein wesentliches Kriterium für Messung ist gerade,daß der zu messende Wert eindeutig bestimmt ist.Eine etwas kompliziertere Methode besteht darin,die Leute zu befragen und anschließend das arithmetische Mittel aus den genannten Werten zu bilden.Diese Methode führt zu einem eindeutigen Mittelwert.Sie kann also als Meßmethode in einem weiteren Sinn angesehen werden.Sie ist auch nicht rein hypothetisch,sondern wird tatsächlich angewandt und sie findet sich auch in der ökonomischen Literatur.Es ist klar,daß auch diese Methode von der Tauschwirtschaft unabhängig ist.Sie funktioniert unabhängig davon,ob die Personen ihren Nutzen maximieren oder nicht.Damit haben wir zumindest eine unabhängige Meßmethode für Preise und wir brauchen über andere Meßmethoden hier nicht weiter nachzudenken: p ist ÖKO-nicht-theoretisch.

Die schwierigste Größe,auch was die Frage der Messung betrifft,ist wieder die Nutzenfunktion.Wie kann man U messen? Wir müssen hier zwei Fälle unterscheiden,weil alle Meßverfahren zu einer der beiden Arten gehören,die wir nun diskutieren.

Die erste Art von Meßverfahren funktioniert folgendermaßen. Man setzt voraus,daß U mathematisch genau bestimmt ist.Der Nutzen,den eine Person aus einer Güterverteilung zieht,wird dann einfach "gemessen",indem man die Ausstattung aus dieser Verteilung als Argument in die Nutzenfunktion einsetzt und den Funktionswert berechnet.Es mag auf den ersten Blick befremdlich erscheinen,hier von Messung zu reden.Aber ein Blick auf die Naturwissenschaften zeigt,daß dort eine Messung oft im wesentlichen aus einer rein mathematischen Berechnung besteht.

Als Beispiel für ein derartiges Meßverfahren können wir eine Stone-Geary-Tauschwirtschaft betrachten,wobei vorausgesetzt wird,daß die Zahlen β_i und δ_j bekannt sind.In einem solchen System läßt sich der Nutzen,den Person π aus dem Konsum der Gütermengen $\alpha_1,..,\alpha_n$ zieht,messen,indem man $U_\pi(\alpha_1,..,\alpha_n)$ berechnet.Nach DII-12) ist ja

$$U_\pi(\alpha_1,..,\alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot \log(\alpha_i - \delta_i)$$

und wenn die Zahlen β_i und δ_j bekannt sind,so erhält man durch Einsetzung bestimmter α_i und Ausrechnung der rechten Seite der Gleichung eine reelle Zahl,eben den gesuchten Nutzen (ÜII-19).

Diese Meßmethode ist in klarer Weise "theorienabhängig". Sie funktioniert nur unter Voraussetzung einer Stone-Geary-Nutzenfunktion.Für Systeme mit dieser Nutzenfunktion läßt sich aber beweisen,daß es zu jeder Anfangsverteilung eine Endverteilung gibt,die auch Gleichgewichtsverteilung ist.Das heißt, bei gegebener Anfangsverteilung ist man stets sicher,daß durch geeignete Täusche ein Modell der Tauschwirtschaft erzeugt werden kann.Die Erfassung eines Systems,in dem eine solche Messung funktioniert,ist also ein potentielles Modell,das bei Ersetzung seiner Endverteilung q^e durch eine geeignete (existente!) andere zu einem Modell wird.Die Meßmethode liefert bei Anwendung folglich ein Modell der Theorie und ist in diesem Sinn theorieabhängig.Sie läßt sich offenbar nicht zur Überprüfung der Theorie benutzen.Denn um die Theorie zu überprüfen,braucht man Funktionswerte,die unabhängig von der Theorie meßbar sind.Unabhängigkeit ist aber nicht gegeben,wenn die Messung nur unter Voraussetzung der Theorie möglich ist.

Das letzte Argument läßt sich auf eine ganze Klasse ähnlicher Meßmethoden verallgemeinern,nämlich auf alle Meßmethoden,bei denen aus der speziellen mathematischen Form der Nutzenfunktion deren Konvexität folgt.Es gilt nämlich der folgende Satz.

<u>TII-6</u> Ist $<J,G,p,q^a,q\ ,U>$ eine mögliche Tauschwirtschaft und sind die Nutzenfunktionen U_π für alle $\pi \in J$ streng konvex, so gibt es eine Verteilung q^e, sodaß
$<J,G,p,q^a,q^e,U> \in M(ÖKO)$

Ein ähnlicher Satz wird, allerdings in ganz anderer Notation, in [Debreu,1976] ,S.103, bewiesen.

Alle Meßmethoden, bei denen der Nutzen durch Rückgriff auf die spezielle Form der Nutzenfunktion erfolgt und bei denen diese Form Konvexität impliziert, sind also in obigem Sinn theorienabhängig. Sie alle setzen wegen TII-6) voraus, daß die Tauschwirtschaft Modelle hat. Alle bisher in der Ökonomie benutzten Meßmethoden dieser Art enthalten tatsächlich konvexe Nutzenfunktionen. Das ist einleuchtend, denn wie kommt man dazu, sich eine bestimmte mathematische Form von U vorzugeben? Diese Form wird zunächst hypothetisch angenommen und sodann eventuell durch Versuche oder Beobachtungen bestätigt. Erst eine solchermaßen bestätigte Nutzenfunktion U wird man als Voraussetzung für eine Nutzenmessung der geschilderten Art verwenden. Es ist aber intuitiv klar, daß man hypothetisch zunächst konvexe Funktionen ansetzen wird.

Die zweite Art von Meßmethoden für U wurde entwickelt, um dieser Schwierigkeit zu entgehen. Man suchte nach einer Methode, den Nutzen ohne Rückgriff auf die Tauschwirtschaft zu bestimmen. Die Grundidee dabei, die unabhängig von Ramsey und v.Neumann entwickelt wurde, ist, ein "Präferenzsystem" vorauszusetzen, das hinreichend stark ist, um eine <u>Definition</u> der Nutzenfunktion zu ermöglichen. Ein Präferenzsystem besteht dabei im wesentlichen aus einer Präferenzrelation $\prec$, wobei $a \prec b$ bedeutet, daß b vor a vorgezogen wird. Für die Nutzenmessung braucht man dann nicht vorauszusetzen, daß das betrachtete System ein Modell der Tauschwirtschaft ist, sondern "nur", daß es ein Präferenzsystem ist, d.h. ein System, das geeignete Axiome über die Präferenzrelation $\prec$ erfüllt. In solchen Präferenzsystemen läßt sich die Nutzenfunktion nachweislich (bis auf bestimmte Transformationen) definieren und somit messen. Wir werden Präferenzsysteme im nächsten Abschnitt genauer behandeln. Für die Nutzenmessung ergibt sich dabei folgendes

-nicht erwartete- Resultat.Aus der Existenz eines Präferenzsystems läßt sich die Existenz eines Modells der Tauschwirtschaft ableiten.Wenn man also für die Nutzenmessung gemäß der Ramsey-v.Neumannschen Idee einen Rückgriff auf die Tauschwirtschaft vermeiden will und nur voraussetzt,daß das betrachtete System ein Präferenzsystem ist,so hat man dabei trotzdem -"unbewußt"- die Tauschwirtschaft vorausgesetzt. Auch das Ramsey-v.Neumannsche Verfahren,den Nutzen zu messen, indem man ein Präferenzsystem voraussetzt,in dem sich der Nutzen definieren läßt,ist also eine von der Tauschwirtschaft abhängige Meßmethode.Damit sind auch die Meßmethoden der zweiten Klasse -"Klasse",weil es inzwischen eine ganze Reihe von Versionen mit Präferenzsystemen gibt- als ÖKO-abhängig nachgewiesen.Da alle bisher bekannten Meßmethoden für U aus einer dieser beiden Klassen stammen,schließen wir -nicht logisch,aber praktisch- darauf,daß U ÖKO-theoretisch ist.

Es sei noch bemerkt,daß Ökonomen die Möglichkeit der Nutzenmessung über Präferenzen gerne so deuten,daß die Nutzenfunktion in der Tauschwirtschaft eigentlich nicht so zentral sei,daß man ihre Bedeutung (über Messung) durch eine tieferliegende Theorie der Präferenzen festlegen könne und sie daher im Prinzip für die Ökonomie sogar irrelevant sei.Die genaue Analyse zeigt jedoch,daß sich diese Ansicht nur schwerlich wird aufrecht erhalten lassen.Man dachte zwar,den Nutzenbegriff durch einen "tieferliegenden" Begriff der (qualitativen) Präferenz zu "ersetzen",aber beide Begriffe sind logisch eng miteinander verknüpft,sodaß man nur von "Ersetzung durch einen logisch äquivalenten Begriff" und nicht durch einen tieferliegenden reden kann,wodurch die ÖKO-Abhängigkeit nicht aufgehoben wird.

Schließlich muß auch die Messung von q^e noch betrachtet werden.Hier haben wir eine etwas merkwürdige Situation.Einerseits ist q^e als Güterverteilung in einer Weise bestimmbar,die die Tauschwirtschaft nicht voraussetzt.Andererseits aber soll in Tauschwirtschaften q^e eine Gleichgewichtsverteilung sein. Dies kann man allein aus den Gütermengen von q^e nicht erschließen.Man muß dazu vielmehr nachrechnen,ob die Axiome mit q^e erfüllt sind.Es kommt also alles darauf an,wie wir q^e auffassen.Wird q^e einfach als eine Güterverteilung angesehen, von der man zunächst nicht unterstellt,daß sie Gleichgewichtsverteilung sei,dann ist q^e theorienunabhängig meßbar.Faßt man aber q^e so auf,daß Gleichgewicht ein notwendiger Bestandteil von q^e ist,so kann man q^e nur in theorienabhängiger Weise messen.

PRÄFERENZSYSTEME*

Die Grundidee bei der "Zurückführung" des Nutzens auf Präferenzen ist,eine "Vorzugs"-Relation oder Bewertungsrelation (Präferenzrelation) einzuführen,welche beschreibt,wie ein Individuum gewisse Alternativen vor anderen vorzieht oder höher bewertet als andere.Der wesentliche Trick besteht in der Wahl komplizierter Alternativen: Alternativen bestehen nicht einfach aus Ergebnissen oder Ereignissen oder Situationen oder erreichbaren Gegenständen,sondern aus Wetten.Das heißt,die Alternative,vor die ein Individuum gestellt wird,hat nicht die Form "Du kannst Gegenstand a oder Gegenstand b haben",sondern die Form "Du kannst zwischen der Wette w und der Wette w' wählen".Eine Wette w der einfachsten Art bezieht sich auf einen Vorgang,der mit Sicherheit nur zwei verschiedene Ergebnisse liefern kann,wobei man aber nicht mit Sicherheit sagen kann, welches dieser Ergebnisse tatsächlich eintreten wird.Sind a und b mögliche Ergebnisse,so gibt es eine Wahrscheinlichkeit α ,mit der a eintritt und eine Wahrscheinlichkeit β ,mit der b eintritt.Wenn mit Sicherheit eines der beiden Ereignisse eintritt,so muß $\alpha+\beta=1$ sein,also $\beta=1-\alpha$. Man kann sich nun eine Wette auf a so vorstellen,daß ein bestimmter Geldbetrag auf a gesetzt wird,den man bei Eintreten von a mit Gewinn zurückerhält,während bei Eintreten von b der Geldbetrag verloren ist. Diese Vorstellung ist aber formal nicht nötig,weil man den ganzen Vorgang der Wette vollständig mit a,b und α beschreiben kann.Im Prinzip kann man daher eine Wette auffassen als ein Tripel $\langle a,b,\alpha\rangle$,wobei a und b die zwei einzig möglichen Ergebnisse eines Vorgangs und α eine reelle Zahl zwischen O und 1 ist.

Es erweist sich als zweckmäßig,den Wettbegriff zu verallgemeinern,sodaß auch Wetten mit mehreren (endlich vielen) Ergebnissen berücksichtigt werden.Auch den Sonderfall eines einzigen möglichen Ergebnisses möchte man berücksichtigen.In diesem Fall ist die Wahrscheinlichkeit α,mit der das Ergebnis eintritt,gleich 1.Solche verallgemeinerten Wetten wollen wir Wettsysteme nennen.Ist A eine Menge möglicher Ergebnisse von gegebenen Vorgängen,so läßt sich die Menge aller Wettsysteme über A abstrakt wie folgt definieren.

DII-13 Sei A eine endliche Menge.

$$\omega(A):=\{w:\mathrm{Pot}(A)\rightarrow[0,1]/w(A)=1 \text{ und für alle } B,C\subseteq A: \text{ wenn } B\cap C=\emptyset, \text{dann } w(B\cup C)=w(B)+w(C)\}$$

heißt die Menge aller Wettsysteme über A

Ein Wettsystem w ist also eine Funktion,die jeder Menge von Ergebnissen aus A eine Zahl zwischen 0 und 1 zuordnet.Insbesondere wird jeder einelementigen Menge $\{a\}$ mit $a\in A$ eine Zahl $w(\{a\})$ zugeordnet.Diese Zahl ist zu interpretieren als die Wahrscheinlichkeit dafür,daß das Ergebnis a eintritt.Kennt man die Wahrscheinlichkeiten für alle einelementigen Mengen, so lassen sich die Werte $w(B)$ für mehrelementige Mengen B berechnen.Denn weil A endlich ist,muß auch $B\subseteq A$ endlich sein, also $B=\{b_1,..,b_m\}$.Durch sukzessive Anwendung der Bedingung $w(B\cup C)=w(B)+w(C)$ erhält man

$$w(\{b_1,..,b_m\})=\sum_{i=1}^{m} w(\{b_i\}).$$

Als Beispiel betrachten wir eine Menge A von Ergebnissen,die mindestens drei Ergebnisse a,b,c enthält.Ein Wettsystem w aus $\omega(A)$ wird für $\alpha\in[0,1]$ definiert durch

$$w(\{a\}):=\alpha$$
$$w(\{b\}):=1-\alpha$$
$$w(X)=0 \text{ für } \{a\}\neq X\neq\{b\}.$$

w entspricht offensichtlich einer einfachen Wette auf a gegen b oder umgekehrt.w zeichnet genau zwei Ergebnisse a,b und die Wahrscheinlichkeiten für deren Eintreten,α und $1-\alpha$ aus.Die anderen Ergebnisse spielen keine Rolle,sie haben alle die Wahrscheinlichkeit 0.

Als zweites Beispiel betrachten wir eine Menge A und das Wettsystem w aus dem letzten Absatz. Ein zweites Wettsystem $w' \in \omega(A)$ wird definiert durch

$$w'(\{c\}):=1 \quad \text{und} \quad w'(X)=0 \text{ für } X \neq \{c\}.$$

w' stellt eine "Pseudowette" auf c dar. Da c mit Sicherheit eintritt (da die Wahrscheinlichkeit $w'(\{c\})$ für sein Eintreten gleich 1 ist), ist kein Gewinn oder Verlust zu erwarten, aber die Einbeziehung solcher Wettsysteme erweist sich formal als vorteilhaft. Man kann das Wettsystem w' identifizieren mit dem Ergebnis c. Für $\beta \in [0,1]$ können wir nun ein neues Wettsystem aus w und w' bilden, nämlich $\beta w+(1-\beta)w'$. Die Wahrscheinlichkeit einer Argumentmenge X bei diesem Wettsystem bildet man, indem man X als Argument sowohl bei w als auch bei w' einsetzt.

$$[\beta w+(1-\beta)w'](X) := \beta w(X)+(1-\beta)w'(X).$$

Man rechnet leicht nach, daß

$$[\beta w+(1-\beta)w'](X) = \begin{cases} \alpha\beta & \text{für } X=\{a\} \\ \beta(1-\alpha) & \text{für } X=\{b\} \\ 1-\beta & \text{für } X=\{c\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\beta w+(1-\beta)w'$ ist also ein Wettsystem. Mit Wahrscheinlichkeit $1-\beta$ kommt c, mit Wahrscheinlichkeit β die Wette w heraus. Das heißt, es wird die Alternative "c oder w" beschrieben. Die Alternative besteht in einer Wahl zwischen dem Ergebnis c und dem Eingehen der Wette w.

Wettsysteme über einer Menge A von Ergebnissen werden nun als Alternativen aufgefaßt, die einem Individuum offenstehen. Das heißt, einer Person werden verschiedene Wettsysteme vorgelegt und sie muß für je zwei solcher Systeme w und w' entscheiden, ob sie w vor w' vorzieht oder umgekehrt. Diese Relation des "Vorziehens" bildet den Grundbegriff der Theorie der Präferenz. Man nimmt an, daß es für jede Person eine solche "Präferenzrelation" $\prec$ mit folgender Bedeutung gibt. $w \prec w'$ bedeutet "die Person zieht das Wettsystem w' dem Wettsystem w vor". Man stellt sich zwar vor, daß jede Person eine solche Präferenzrelation hat, aber damit ist noch nicht klar, wie man sie herausfindet.Um die Präferenzrelation einer Person herauszufinden,muß man sie befragen oder testen.Man wird ihr verschiedene Wettsysteme vorlegen und sie fragen,welches der Wettsysteme sie am höchsten einstuft.Indem man dieses Verfahren für verschiedene Kombinationen von Wettsystemen wiederholt,kann man Schritt für Schritt die Präferenzrelation ermitteln.Ein solcher Test läßt sich formal durch eine Struktur folgender Art erfassen.(Die Axiome 5)-7),sowie das folgende Theorem TII-7) sind aus [Fishburn,1970],S.105 ff.entnommen.)

<u>DII-14</u> $\langle A,W,\prec,W_o\rangle$ ist ein <u>angewandtes Präferenzsystem</u> gdw

1) A ist eine endliche,mindestens zwei-elementige Menge
2) $W=\omega(A)$
3) $\prec\ \subseteq W\times W$
4) $W_o\subseteq W$ und W_o ist nicht leer
5) für alle $w,w',w''\in W$:
5.1) wenn $w\prec w'$,dann nicht: $w'\prec w$
5.2) wenn $\neg(w\prec w')$ und $\neg(w'\prec w'')$,dann $\neg(w\prec w'')$
6) für alle $w,w',w''\in W$ und $\alpha\in[0,1]$: wenn $w\prec w'$,dann $\alpha w+(1-\alpha)w''\prec \alpha w'+(1-\alpha)w''$
7) für alle $w,w',w''\in W$ gibt es $\beta,\delta\in[0,1]$,sodaß: wenn $w\prec w'$ und $w'\prec w''$,dann $\beta w+(1-\beta)w''\prec w'\prec \delta w+(1-\delta)w''$
8) für alle $w_o\in W_o$ und $w\in W$: wenn ($w_o\prec w$ oder $w_o=w$),dann $w_o=w$

A stellt die Menge der möglichen Ergebnisse dar,mit denen eine Person konfrontiert wird.W ist die Menge der früher definierten Wettsysteme über A.W_o enthält die von der Person am höchsten eingestuften Wettsysteme.W_o kann mehr als ein Element enthalten,es kann z.B. unvergleichbare maximale Elemente geben. $\prec$ ist die Präferenzrelation der Person für die verschiedenen Wettsysteme.Forderung 5) enthält zwei Bedingungen für $\prec$. Bedingung 5.1) besagt,daß $\prec$ zu lesen ist als "wird echt vorgezogen" und 5.2) ist eine leichte Verallgemeinerung der Forderung nach Transitivität von $\prec$.Transitivität ($w\prec w'$ und $w'\prec w''$ impliziert $w\prec w''$) folgt aus 5.2) und 5.1). Bedingung 6) besagt,daß sich das Präferenzverhältnis zwischen zwei Wettsystemen nicht ändert,wenn man beide in gleicher

Weise abändert. Die Änderung erfolgt durch "konvexe" Addition eines Wettsystems w''. 7) fordert, daß die Wettsysteme hinreichend "fein" abgestuft sind. Obwohl $w' \prec w''$, gibt es ein β, sodaß $\beta w + (1-\beta)w'' \prec w'$. $1-\beta$ ist hier als eine sehr kleine Zahl vorzustellen, sodaß β fast 1, also βw fast mit w identisch ist. Entsprechendes gilt für die zweite Hälfte von 7). 8) schließlich besagt, daß die Elemente von W_o bezüglich der Präferenzrelation in W maximal sind. Das heißt, sie sind am höchsten eingestuft in dem Sinn, daß es keine Elemente von W gibt, die echt höher eingestuft werden.

Einige Abkürzungen erweisen sich als nützlich.

DII-15 Es sei $\langle A, W, \prec, W_o \rangle$ ein angewandtes Präferenzsystem.

a) $\preccurlyeq \subseteq W \times W$ wird definiert durch
$w \preccurlyeq w'$ gdw ($w \prec w'$ oder $w = w'$)

b) $\sim \subseteq W \times W$ wird definiert durch
$w \sim w'$ gdw ($w \preccurlyeq w'$ und $w' \preccurlyeq w$)

c) für $a \in A$ wird $w_a \in \omega(A)$ definiert durch

$$w_a(X) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } X = \{a\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\preccurlyeq$ entsteht aus Abschwächung der echten $\prec$-Relation, in Analogie zum Verhältnis von $\leq$ und $<$ für Zahlen. $w \sim w'$ bedeutet, daß w und w' äquivalent sind. Das heißt, beide nehmen in der Präferenzordnung der Person den "gleichen Rang" ein. Weder wird w vor w' vorgezogen, noch umgekehrt. Man sagt auch, daß die Person zwischen w und w' <u>indifferent</u> ist. w_a ist das schon erwähnte <u>Pseudowettsystem</u>, bei dem auf ein mit Sicherheit eintretendes Ergebnis a gewettet wird.

Der entscheidende Satz, aufgrund dessen man in angewandten Präferenzsystemen eine Nutzenfunktion "definieren" kann, lautet nun:

TII-7 Ist $\langle A, W, \prec, W_o \rangle$ ein angewandtes Präferenzsystem, so gibt es eine Funktion $U: W \to \mathbb{R}$ derart, daß für alle $w, w' \in W$ und $\alpha \in [0,1]$

(1) $w \prec w' \Leftrightarrow U(w) < U(w')$

(2) $U(\alpha w + (1-\alpha)w') = \alpha U(w) + (1-\alpha)U(w')$

Weiter ist U bis auf lineare Transformationen eindeutig

bestimmt, d.h. für $U':W\rightarrow \mathbb{R}$ gilt:
wenn U' Bedingungen (1) und (2) erfüllt, dann gibt es $\beta>0$ und $\delta \in \mathbb{R}$, sodaß für alle $w\in W$:
$U(w)=\beta U'(w)+\delta$

Die Funktion U ist als Nutzenfunktion zu interpretieren. Sie ordnet jedem Wettsystem w eine Zahl U(w) zu, nämlich den Nutzen, den die Person aus dem Abschluß der Wette zieht. Nach Bedingung (1) spiegelt die <-Relation zwischen den Nutzenwerten genau die Präferenzrelation zwischen den Wettsystemen wider. Bedingung (2) ist intuitiv schwerer zu erfassen. Sie drückt aus, daß sich die "konvexe" Addition von Wettsystemen in der Addition der entsprechenden Nutzenwerte niederschlägt. Die Eindeutigkeit von U bis auf lineare Transformationen hat zur Folge, daß bei Vorgabe von zwei Funktionswerten U eindeutig bestimmt ist. Das heißt: wenn für zwei beliebige w und $w' \in W$ verlangt wird, daß $U(w)=0$ und $U(w')=1$ sein soll, so ist U durch diese Forderung und durch (1) und (2) von TII-7) eindeutig bestimmt. In diesem Sinn kann man von einer Definition von U sprechen.

Den etwas künstlichen Ansatz mit Wettsystemen als Alternativen, der zu einer eleganten Darstellung führt, kann man leicht modifizieren, sodaß man auf die realere Ebene der Ergebnisse kommt. Eine nach TII-7) gegebene Nutzenfunktion U induziert nämlich in natürlicher Weise eine Nutzenfunktion U^* auf den Ergebnissen.

<u>DII-16</u> Ist $\langle A,W,\prec,W_o\rangle$ ein angewandtes Präferenzsystem und U eine der nach TII-7) existierenden Funktionen, so sei $U^*:A\rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $U^*(a):=U(w_a)$

Der Nutzen des Ergebnisses a wird also definiert durch den Nutzen, den das Pseudowettsystem w_a für die Person hat.

Nehmen wir die Nutzenfunktion zu einem angewandten Präferenzsystem hinzu, so erhalten wir

<u>DII-17</u> $\langle A,W,\prec,W_o,U\rangle$ ist ein angewandtes Präferenzsystem <u>mit Nutzenfunktion</u> gdw
1) $\langle A,W,\prec,W_o\rangle$ ist ein angewandtes Präferenzsystem
2) $U:W\rightarrow \mathbb{R}$

3) für alle $w,w' \in W$ und $\alpha \in [0,1]$

3.1) $w \prec w' \Leftrightarrow U(w) < U(w')$

3.2) $U(\alpha w + (1-\alpha)w') = \alpha U(w) + (1-\alpha)U(w')$

Nach TII-7) ist in einem angewandten Präferenzsystem mit Nutzenfunktion die Nutzenfunktion bis auf lineare Transformationen bestimmt.Nach beliebiger Vorgabe zweier Nutzenwerte ist also die Nutzenfunktion eindeutig bestimmt und daher ziemlich überflüssig.Wir haben sie auch nur eingeführt,weil wir die Nutzenmessung nach der Idee von Ramsey und v.Neumann schildern wollen.Da eine Größe nur gemessen werden kann,wenn sie auch vorkommt (wenn "es sie gibt"),brauchen wir zur Beschreibung dieser Meßmethode eine Nutzenfunktion.

Die Methode funktioniert so.Einer Person π wird folgendes Wettsystem angeboten: π kann entweder gar nichts tun (Ergebnis c) oder eine einfache Wette w mit möglichen Ergebnissen a und b abschließen.Das Wettsystem hat also die Gestalt $\alpha w+(1-\alpha)w_c$ aus obigem Beispiel.Die Wahrscheinlichkeiten α und $1-\alpha$ für das Eintreten von a und b werden als bekannt vorausgesetzt.Das Ergebnis b ist ebenfalls bekannt,es besteht z.B. im Verlust von 5 Mark.Ziel des Experiments ist es,den Nutzen eines Ergebnisses a herauszufinden,also $U(w_a)$ oder $U^*(a)$.Der Nutzen von a wird wie folgt ermittelt.Man variiert den Gewinn, d.h.man bietet verschiedene Gewinnbeträge an und schaut bei jedem so entstehenden Wettsystem w,wie sich π zwischen c und w entscheidet.Bei einem bestimmten Gewinnbetrag a wird π zwischen c und w keine echte Präferenz mehr zeigen.Weder wird π c vor w vorziehen noch umgekehrt.π ist dann indifferent gegenüber c und w,d.h.in der Symbolik von DII-15b): $w \sim w_c$. (Diese Methode stammt von Mosteller und Nogee,siehe [Mosteller & Nogee ,1951].Wir lehnen uns hier an die Darstellung in [Händler ,1979],S.133 ff.an.)

Die Indifferenz könnte man im Prinzip dadurch feststellen, daß die Person sich weigert,eine Entscheidung für eine der Alternativen zu treffen.Tatsächlich aber wird π in der Testsituation in der Regel eine Alternative bevorzugen.Die Indifferenz kann man dann nur dadurch herausfinden, daß man mehrere derartige Testreihen durchführt und π sich etwa in der Hälfte aller Fälle für w bzw. für c entscheidet. Da diese statistische Komplikation für uns hier nicht wichtig ist, beschreiben wir eine idealisierte Situation, in der π auf Anhieb seine Indifferenz zwischen w und c zu erkennen gibt.

DII-18 x ist ein RN-Meßmodell bezüglich <c,O>,<b,-1> und a gdw es A, W, $\prec$, W_o und U gibt, sodaß

1) $x=\langle A,W,\prec,W_o,U\rangle$ ist ein angewandtes Präferenzsystem mit Nutzenfunktion
2) $a,b,c\in A$ und $a\neq b\neq c\neq a$
3) $U(w_c)=0$ und $U(w_b)=-1$
4) es gibt $\alpha\in[0,1]$, $\alpha>0$, sodaß
4.1) $W_o=\{w_c,\alpha w_a+(1-\alpha)w_b\}$
4.2) $w_c\sim\alpha w_a+(1-\alpha)w_b$

c ist hier das Ergebnis, welches im Nichtstun der Person, d.h. in ihrer Ablehnung, auf die Wette $w:=\alpha w_a+(1-\alpha)w_b$ einzugehen, besteht. In 3) werden die Nutzenwerte von w_c und w_b willkürlich festgesetzt, sodaß nach unseren früheren Bemerkungen die Nutzenfunktion in x eindeutig bestimmt ist. W_o enthält nach 4.1) genau zwei Elemente, nämlich w_c und w. Diese beiden Wetten sind also für die Person unter den vorgelegten Wetten maximal, d.h. es gibt keine Wetten, die echt vor ihnen vorgezogen werden. Zwischen w_c und w ist die Person indifferent (DII-18-4.2), d.h. weder wird w vor w_c vorgezogen noch umgekehrt.

Die Bezeichnung RN-Meßmodell hat zwei Gründe. "RN" soll auf Ramsey und v. Neumann hinweisen und von einem Meßmodell reden wir, weil in ihm der Wert $U(w_a)$ eindeutig bestimmt ist, also im Meßmodell bei Voraussetzung der anderen Komponenten des Modells gemessen werden kann.

TII-8 $x=\langle A,W,\prec,W_o,U\rangle$ sei ein RN-Meßmodell bezüglich <c,O>, <b,-1> und a. In x ist $U(w_a)$ (und damit auch $U^*(a)$) eindeutig bestimmt

Zum Beweis setzt man $w:=\alpha w_a+(1-\alpha)w_b$. Aus DII-18-3), DII-18-4.2), DII-17-3.1), DII-17-3.2) und DII-18-3) erhält man sukzessive folgende Gleichungen: $0=U(w_c)=U(w)=\alpha U(w_a)+(1-\alpha)U(w_b)=\alpha U(w_a)-(1-\alpha)$. Hieraus folgt $U(w_a)=(1-\alpha)/\alpha$.

Wir haben hier eine Struktur,in der $U(w_a)$ im wesentlichen durch $\prec$ festgelegt ist.Diese Struktur beschreibt also die Messungs des Nutzens durch Bestimmung der Präferenzrelation einer Person.

Zunächst ist zu bemerken,daß die Nutzenfunktion in der Tauschwirtschaft Güterverteilungen als Argumente hat,während hier als Argumente Wettsysteme auftreten.Um beide Begriffe miteinander in Verbindung bringen zu können,ist es ratsam,bei den Präferenzsystemen U^* anstelle von U zu benutzen.U^* kann man nun mit der Nutzenfunktion der Tauschwirtschaft vergleichbar machen,indem man Güterverteilungen als Ergebnisse ansieht. Besonders natürlich ist es,der Einkommensbeschränkung genügende Verteilungen als Ereignisse zu wählen.Verschiedenheit der Argumente ist also kein Einwand gegen das gerade skizzierte Programm der Nutzenmessung.

Die zweite,schwierigere Frage ist,inwieweit mit dieser Meßmethode der Nutzen auf einen tieferliegenden Begriff,nämlich den der Präferenz zurückgeführt wurde.In einem RN-Meßmodell ist ja nach TII-7) die Nutzenfunktion nicht wirklich erforderlich.Sie ist nur erforderlich,um überhaupt von Nutzenmessung reden zu können.Tatsächlich aber ist die Information über den zu messenden Nutzenwert schon in Strukturen enthalten,die aus RN-Meßmodellen durch Weglassung von U entstehen.Wir wollen solche Strukturen nutzenunabhängige RN-Meßmodelle nennen.

<u>DII-19</u> x ist ein <u>nutzenunabhängiges</u> RN-Meßmodell <u>bezüglich</u> a,b,c gdw es $A,W,\prec,W_o$ gibt,sodaß

1) $x=\langle A,W,\prec,W_o\rangle$ ist ein angewandtes Präferenzsystem

2) $a,b,c \in A$ und $a\neq b\neq c\neq a$

3) es gibt $\alpha\in[0,1],\alpha>0$,sodaß

3.1) $W_o=\{w_c,\alpha w_a+(1-\alpha)w_b\}$

3.2) $w_c\sim\alpha w_a+(1-\alpha)w_b$

Daß eine solche Struktur schon alle Information über den Wert $U(w_a)$ enthält,der in einem RN-Meßmodell zu messen ist,sieht man aus folgendem Theorem.

<u>TII-9</u> Sei $x=\langle A,W,\prec,W_o\rangle$ ein nutzenunabhängiges RN-Meßmodell bezüglich a,b,c.Dann gibt es genau eine Funktion

$U':W \to \mathbb{R}$, sodaß $\langle A,W,\prec,W_o,U'\rangle$ ein NR-Meßmodell bezüglich $\langle c,0\rangle,\langle b,-1\rangle$ und a ist

In anderer Formulierung besagt die Eindeutigkeitsaussage von TII-9), daß für jedes RN-Meßmodell $\langle A,W,\prec,W_o,U\rangle$ bezüglich $\langle c,0\rangle,\langle b,-1\rangle$ und a folgt: $U=U'$. Das heißt, wenn man $x=\langle A,W,\prec,W_o\rangle$ kennt, so liegt auch der Nutzen $U(w_a)$ fest für jede Nutzenfunktion U, die man zu x hinzunehmen kann, sodaß ein RN-Meßmodell bezüglich $\langle c,0\rangle,\langle b,-1\rangle$ und a entsteht. Denn es gibt überhaupt nur eine einzige derartige Nutzenfunktion.

DII-18) und DII-19) enthalten beide die Bedingung, daß W_o nur Elemente enthält, die bezüglich $\prec$ maximal sind. Stellen wir uns vor, diese Bedingung sei in DII-18) und DII-19) weggelassen worden. Dann verliert die Bedingung $w_c \sim \alpha w_a+(1-\alpha)w_b$ ihre intuitive Bedeutung. Wir können sie nicht mehr als Indifferenz deuten. Denn wenn die Elemente von W_o nicht mehr maximal zu sein brauchen, so kann die Person irgendwelche Wettsysteme auswählen, die überhaupt nichts mit ihrer Präferenz zu tun haben. Zum Beispiel könnte die Person die Auswahl durch einen Zufallsmechanismus vornehmen. Es wäre völlig absurd, in diesem Fall von einer Nutzenmessung zu sprechen. Da dieser Punkt für das folgende Argument wichtig ist, wollen wir ihn noch einmal in anderer Weise formulieren. Damit man bei DII-18) und DII-19) von Meßmodellen für den Nutzen sprechen kann, ist es wesentlich, die Maximalität der Elemente von W_o zu fordern. Denn W_o soll ja gerade die von der Person beim Test ausgezeichneten Wettsysteme enthalten, die intuitiv "am höchsten" eingestuft werden. Die Idee, daß die Person solche Wettsysteme auswählt, die sie "am höchsten" einstuft, läßt es überhaupt erst zu, von Nutzenmessung zu reden. Nutzenmessung liegt nur vor, wenn wir annehmen, die Person handle "rational", so daß sie ihren Nutzen maximiert. Das zeigt sich aber daran, daß sie auch in ihrer Präferenzordnung die maximalen Elemente auswählt.

Man erkennt hier, daß Nutzen und Präferenz eigentlich nur zwei verschiedene Wörter sind, mit denen dasselbe gemeint ist. Beide dienen dazu, ein Maximierungsverhalten zu beschreiben. Ein Unterschied besteht darin, daß Präferenz ein qualitativer Begriff und Nutzen ein quantitativer, in Zahlen ausdrückbarer

Begriff ist.

In der Tat läßt sich die angedeutete Intuition formal präzisieren.Wir können eine logische Beziehung zwischen angewandten Präferenzsystemen mit Nutzenfunktion und Tauschwirtschaften herstellen,sodaß eine wechselseitige Ableitung der Axiome möglich wird (vergleiche (ÜII-20)).

Intuitiv läßt sich die Situation wie folgt beschreiben.Man kann eine Übersetzung definieren,die jedes angewandte Präferenzsystem mit Nutzenfunktion in eine Tauschwirtschaft übersetzt.Die Axiome der Tauschwirtschaft lassen sich hierbei aus denen der Präferenzstruktur durch Übersetzung gewinnen.Umgekehrt kann man auch die Axiome der Präferenzstruktur aus denen der Tauschwirtschaft nach Rückübersetzung ableiten.

Das Vorliegen dieser Beziehung zeigt,daß Tauschwirtschaft und Präferenztheorie eng miteinander verknüpft sind.Beide sind in einem ziemlich starken Sinn logisch miteinander verbunden und voneinander abhängig.Jedenfalls kann man die Präferenztheorie nicht als tieferliegend im Sinne von "unabhängig von der Tauschwirtschaft" bezeichnen.In diesem,etwas komplizierten Sinn,erweist sich auch die zweite Art der im letzten Abschnitt angesprochenen Nutzenmessung,nämlich Nutzenmessung über Präferenzen,als abhängig von der Tauschwirtschaft.Denn die Strukturen,die solche Nutzenmessungen beschreiben,lassen sich in Modelle der Tauschwirtschaft übersetzen.Nutzenmessung über Präferenzen impliziert aber die Existenz angewandter Präferenzsysteme mit Nutzenfunktion und somit auch die Existenz von Tauschwirtschaften.Das heißt,Nutzenmessung mittels Präferenz impliziert die Tauschwirtschaft.

INTENDIERTE ANWENDUNGEN UND EMPIRISCHE BEHAUPTUNG

Die empirische Behauptung der Tauschwirtschaft lautet,grob gesprochen,wie folgt.

> Bestimmte kleine Gesellschaften lassen sich unter dem Gesichtspunkt des Gütertausches als Modelle der Tauschwirtschaft erfassen.

Hier liegt folgende Vorstellung zugrunde.Man hat eine reale kleine Gesellschaft,wie z.B.das Dorf in Beispiel 3).Durch Erhebung der Personen,Güterarten,durch Feststellung (Messung) der Preise und Güterverteilungen und durch Messung der Nutzenfunktion erhält man eine Struktur $<J,G,p,q^a,q^e,U>$.Ist diese Struktur ermittelt,so kann man feststellen,ob sie eine Tauschwirtschaft ist,also die Axiome der Tauschwirtschaft erfüllt.

Zunächst entsteht ein Problem,weil diese Vorstellung offenbar nicht für jede kleine Gesellschaft richtig ist.Wir haben auch in der obigen Formulierung der empirischen Behauptung mit Absicht nur von "bestimmten" und nicht von "allen" Gesellschaften geredet.Es gibt viele kleine Gesellschaften,auch solche der Art unseres Dorfes in Beispiel 3),in denen zwar getauscht wird,aber nach ganz anderen Gesetzen.Das ökonomische Nutzenprinzip spielt dort keine Rolle.Die Kriterien,nach denen getauscht wird,sind durch Gefühle (Haß,Neid,Liebe),Staatsform (in Beispiel 3) etwa in Form von Raubritter Kuno) oder Religion (Klostergemeinschaft) gegeben.Man wird in solchen Gesellschaften oft gar nicht von "Tausch" reden wollen,unsere Sprache hat viele speziellere Wörter für die entsprechenden Transaktionen.Auch ist es schwierig,eine Grenze für "kleine" Gesellschaften anzugeben.Wie groß genau darf ein System sein,damit die Tauschwirtschaft noch funktioniert und ab welcher Größe kommen andere ökonomische Faktoren ins Spiel? Wir müssen feststellen,daß für diese Probleme bis jetzt keine systematische Lösung existiert.Es ist nicht gelungen,allgemein und systematisch zu sagen,auf welche realen Gesellschaften die Axiome der Tauschwirtschaft zutreffen.Anders gesagt: es ist nicht gelungen,eine von der Tauschwirtschaft unabhängige Beschreibung zu liefern,die genau alle ökonomischen Systeme erfaßt,von denen sich dann herausstellt,daß sie Tauschwirtschaften sind.Wenn man dies zugibt und auch akzeptiert,daß die empirische Behauptung der Tauschwirtschaft keine Behauptung über <u>alle möglichen</u> potentiellen Tauschwirtschaften ist,dann fragt es sich,über welche Systeme denn die Tauschwirtschaft nun etwas behauptet.Wie werden die Systeme,von denen behauptet wird,sie seien Tauschwirtschaften -also die <u>intendierten Anwendungen</u> der Tauschwirtschaft- bestimmt? Eine plausible Antwort ist die.Man weist bestimmte konkrete Beispiele vor,etwa das Geschäft zwischen konkreten Personen Meier und Wagner (in Beispiel 1),den Lutschertausch von konkreten Personen Hänschen und Susanne (in Beispiel 2) oder das Geschehen in einem bestimmten realen Bereich (wie etwa in Beispiel 3)).

Die so vorgewiesenen konkreten Systeme mögen eine Klasse I_p^* bilden.Als intendierte Anwendungen bezeichnet man dann all diejenigen konkreten Systeme,die entweder schon zu I_p^* gehören oder sich von Systemen aus I_p^* nur geringfügig unterscheiden. Die Klasse aller intendierten Anwendungen möge mit I^* bezeichnet werden.Die oben formulierte empirische Behauptung läßt sich dann einfacher wiedergeben durch

(3) Für alle $x \in I^*$ gilt: x ist eine Tauschwirtschaft
oder einfacher:
$I^* \subseteq M(\text{ÖKO})$

Wenn unsere Vermutung richtig ist und U in der Tauschwirtschaft theoretisch,dann hat dies für die Bestätigung der empirischen Behauptung (3) Konsequenzen.Wie würde man (3) bestätigen? Man nimmt eine intendierte Anwendung $x=\langle J,G,p,q^a,q^e,U\rangle \in I^*$ und muß prüfen,ob x eine Tauschwirtschaft ist.Um die Axiome nachrechnen zu können,muß man auch die Gestalt der Nutzenfunktion U genau ermitteln,d.h.messen.Da aber U theoretisch ist,kann man U nur ermitteln,wenn die Tauschwirtschaft schon als richtig vorausgesetzt wird,d.h.wenn eine Anwendung x' schon ein Modell ist.Will man dies ($x' \in M(\text{ÖKO})$) nun aber weiter überprüfen,so wiederholt sich das Argument.Man muß die Nutzenfunktion U' von x' messen und da sie theoretisch ist, voraussetzen,daß eine Anwendung x'' schon ein Modell ist.Man sieht: die Bestätigung von (3) ist problematisch.Wir stoßen hier wieder auf das in Kap.I diskutierte "Problem der theoretischen Terme".

Das Problem ist lokalisiert in der Vorstellung,daß zu einer intendierten Anwendung auch die Nutzenfunktion gehöre.Wenn U theoretisch ist,kann U aber nicht theorie<u>un</u>abhängig gemessen werden und liefert daher keinen Beitrag zu einer theorieunabhängigen Beschreibung der jeweils vorliegenden intendierten Anwendung.Es liegt nahe,sich die intendierten Anwendungen einfach ohne U vorzustellen. Die oben geschilderte Vorgehensweise, nach der man in einer intendierten Anwendung die ökonomischen Größen durch Messung ermittelt und anschließend auf Gültigkeit der Axiome hin überprüft, muß dann revidiert werden. Bei Weglassung von U ergibt sich folgende Vorstellung. Man kann in einer intendierten Anwendung die Größen J,G,p,q^a und q^e ermitteln (messen) und erhält so eine Struktur der Art

$$\langle J,G,p,q^a,q^e\rangle.$$

Von dieser Struktur muß festgestellt werden, ob sie mit den Axiomen der Tauschwirtschaft verträglich ist. "Verträglichkeit" bedeutet dabei, daß man diese Struktur durch Hinzunahme einer "geeigneten" Nutzenfunktion U zu einer potentiellen Tauschwirtschaft ergänzen kann, welche die Axiome erfüllt. Das Problem der Messung von U in der realen Situation wird damit verschoben auf das Problem der logischen und rechnerischen Auffindung einer geeigneten Funktion U, die zusammen mit den meßbaren Größen die Axiome erfüllt.

Strukturen, die aus potentiellen Tauschwirtschaften durch Weglassen der Nutzenfunktion entstehen, nennen wir partielle Tauschwirtschaften.

<u>DII-20</u> a) y ist eine <u>partielle Tauschwirtschaft</u> gdw es J,G,p,q^a und q^e gibt, sodaß

1) $y=\langle J,G,p,q^a,q^e\rangle$
2) $J=\{\pi_1,..,\pi_m\}$ ist eine endliche Menge (von Personen)
3) $G=\{\gamma_1,..,\gamma_n\}$ ist eine endliche Menge (von Güterarten)
4) $p:G\rightarrow \mathbb{R}^+$
5) $q^a,q^e:J\times G\rightarrow \mathbb{R}^+_0$

b) M_{pp}(ÖKO) bezeichne die Klasse aller partiellen Tauschwirtschaften

Nach unseren Überlegungen zur Meßbarkeit der verschiedenen Funktionen sind alle in partiellen Tauschwirtschaften vorkommenden Funktionen in einer Weise meßbar, die die Tauschwirtschaft nicht voraussetzt. Eine modifizierte Version der empirischen Behauptung geht von der Vorstellung aus, daß sich intendierte Anwendungen als partielle Tauschwirtschaften auffassen lassen.Oder,wenn wir zwischen intendierten Anwendungen und deren Auffassung als Strukturen nicht unterscheiden,daß alle intendierten Anwendungen partielle Tauschwirtschaften sind.

Mit diesen Bezeichnungen muß die Menge der intendierten Anwendungen,bezeichnet mit I,die Beziehung

$$I \subseteq M_{pp}(\text{ÖKO})$$

erfüllen,damit die empirische Behauptung in der modifizierten Form überhaupt hingeschrieben werden kann.(Man beachte,daß I nun wieder von der vorher benutzten Menge I^* verschieden ist. I^* spielt im folgenden keine Rolle mehr.) Die empirische Behauptung lautet dann genauer:

(4) Zu jedem $y \in I$ gibt es eine Funktion U_y, sodaß $\langle y, U_y \rangle \in M(\text{ÖKO})$.

Das heißt in Worten: zu jeder intendierten Anwendung y gibt es eine Nutzenfunktion U_y,welche,zu y hinzugenommen,eine Tauschwirtschaft ergibt.y hat dabei die Gestalt $y=\langle J,G,p,q^a,q^e \rangle$,sodaß $\langle y,U_y \rangle$ ein Tupel der Gestalt $\langle J,G,p,q^a,q^e,U_y \rangle$,also eine potentielle Tauschwirtschaft ist.

Das Problem der theoretischen Terme tritt dann nicht mehr auf.Denn um (4) zu überprüfen,muß man für die gegebene partielle Tauschwirtschaft y herausfinden,ob <u>es</u> eine Nutzenfunktion U_y <u>gibt</u>.Sind die Funktionen in y alle bekannt,so läuft dies auf ein rein logisches Problem,das man am Schreibtisch lösen kann,hinaus.Das Problem der theoretischen Terme verschwindet also,indem man den Status der theoretischen Terme in der empirischen Behauptung ändert.Sie werden nicht mehr als theorieunabhängig meßbar vorausgesetzt.Die Voraussetzung ihrer Meßbarkeit wird vielmehr in der empirischen Behauptung abgeschwächt zur Voraussetzung nur noch ihrer Existenz.

Man kann die empirische Behauptung (4) anders formulieren, indem man von potentiellen Tauschwirtschaften ausgeht.Eine partielle Tauschwirtschaft erhält man ja gerade durch Weglassen der Nutzenfunktion von einer potentiellen Tauschwirtschaft.Ist $x=\langle J,G,p,q^a,q^e,U \rangle$ eine potentielle Tauschwirtschaft und $y=\langle J,G,p,q^a,q^e \rangle$ die durch Weglassen von U aus x entstehende partielle Tauschwirtschaft, so sagen wir auch, y sei das Redukt von x und schreiben r(x) für y, oder auch y=r(x). Es gilt dann

$$M_{pp}=\{y/\text{es gibt } x\in M_p, \text{sodaß } y=r(x)\}$$

Man kann die durch r ausgedrückte Beziehung durch eine Funktion $r:M_p \rightarrow M_{pp}$ erfassen. Die Funktion r hackt von jeder potentiellen Tauschwirtschaft die Nutzenfunktion ab. Die empirische Behauptung lautet bei Benutzung von r:

(5) Für alle $y\in I$ gibt es $x\in M$, sodaß $r(x)=y$
oder kürzer:
$I\subseteq \bar{r}(M)$.

REINE THEORIE

Wenden wir uns nun der Frage zu, ob die empirische Behauptung der Tauschwirtschaft, also der Satz (5), "wahr" oder, weniger anspruchsvoll, "richtig" ist. In Kap. I haben wir eine Unterscheidung zwischen absolutem und relativem empirischen Gehalt einer Theorie eingeführt. Eine Theorie hat keinen absoluten empirischen Gehalt, wenn sich jedes partielle Modell (also hier jede partielle Tauschwirtschaft) durch Hinzufügung geeigneter theoretischer Terme zu einem Modell (hier: zu einer Tauschwirtschaft) ergänzen läßt. Die Theorie hat keinen relativen empirischen Gehalt, wenn sich alle potentiellen Modelle (hier: potentielle Tauschwirtschaften), in denen schon alle im nicht-theoretischen Vokabular formulierbaren Axiome der Theorie gelten, zu Modellen (Tauschwirtschaften) ergänzen lassen. Erinnern wir uns, daß diese Unterscheidung motiviert war durch die verschiedenen Möglichkeiten, die Axiome der Theorie in zwei Klassen einzuteilen, sodaß die Axiome der einen Klasse gerade die potentiellen Modelle (die potentiellen Tauschwirtschaften) und die Axiome der anderen Klasse gerade die Modelle (die Tauschwirtschaften) charakterisieren. Da es für diese Aufteilung kein klares Kriterium gibt -oder besser: da wir uns hier keinem klaren Kriterium unterwerfen wollen-, kann es vorkommen, daß eine Theorie zwar absoluten, jedoch keinen relativen empirischen Gehalt hat. Der umgekehrte Fall ist dagegen nicht denkbar,weil die beim relativen Gehalt zu untersuchenden partiellen Modelle eine Teilklasse aller partiellen Modelle bilden (ÜII-21).

Es ist klar,daß die Richtigkeit der empirischen Behauptung (5) eng zusammenhängt mit der Frage des empirischen Gehalts. Wenn die Tauschwirtschaft keinen absoluten empirischen Gehalt hat,dann ist (5) sicher richtig und zwar einfach,weil wir ja I als Teilmenge von M_{pp} voraussetzen.Wenn die Tauschwirtschaft dagegen absoluten empirischen Gehalt,aber keinen relativen empirischen Gehalt hat,so läßt sich die Richtigkeit von (5) schon nicht mehr durch kurzes Nachdenken feststellen.Denn sie hängt nun davon ab,ob I auch Teilmenge der "engeren" Klasse M^o_{pp} (vergleiche (ÜII-21)) ist.Aus unseren Festsetzungen allein ($I \subseteq M_{pp}$ und $M^o_{pp} \subseteq M_{pp}$) können wir nicht auf $I \subseteq M^o_{pp}$ schließen. Aber erst die letztere Aussage ergäbe zusammen mit der relativen Gehaltlosigkeit einen Schluß auf die Richtigkeit von (5).

Die Gültigkeit von $I \subseteq M^o_{pp}$ hängt einzig davon ab,ob das "nicht-theoretische" Axiom,nämlich "$q^e \in EB_x$",in allen intendierten Anwendungen erfüllt ist.Man kann hier sicher das Für und Wider durch Argumente abwägen.Als entscheidend erweist sich jedoch ein formaler Gesichtspunkt.Man kann nämlich die Tauschwirtschaft äquivalent formulieren,indem man statt q^e den "theoretischen" Begriff einer Menge E von Gleichgewichtszuständen (oder Gleichgewichtsverteilungen) benutzt (vergleiche [Balzer,1982]).Bei einer solchen Umformulierung lautet das fragliche Axiom "$E \subseteq EB_x$" und enthält somit den theoretischen Begriff E.In diesem Fall enthalten alle "echten" Axiome von DII-4) theoretische Begriffe und es wird $M_{pp}=M^o_{pp}$,sodaß relativer und absoluter empirischer Gehalt zusammenfallen.Da wir uns aus didaktischen Gründen für die "nicht-theoretische" Formulierung von DII-4a-3) entschieden haben,dürfte uns die geschilderte Möglichkeit der Umformulierung erlauben,im folgenden $I \subseteq M^o_{pp}$ anzunehmen.

Wie sieht es nun aber in der Tauschwirtschaft wirklich aus? Die Antwort gibt der folgende Satz.

TII-10 a) Nicht zu jedem $y \in M_{pp}$(ÖKO) gibt es ein $x \in M$(ÖKO), sodaß $r(x)=y$

b) Zu jedem $y \in M^{o}_{pp}$ gibt es ein $x \in M$(ÖKO), sodaß $r(x)=y$, d.h. $\bar{r}(M)=M^{o}_{pp}$

Zum Beweis siehe (ÜII-22). Nach a) hat ÖKO absoluten empirischen Gehalt, nach b) jedoch keinen relativen empirischen Gehalt.

Das ist nicht weiter schlimm, denn wie schon in Kap.I gesagt, ist die Lage bei den meisten reifen empirischen Theorien in den Naturwissenschaften genauso. Die relative empirische Gehaltlosigkeit zeigt nicht, daß die Theorie für empirische Zwecke unbrauchbar wäre. Sie zeigt nur, daß die in der Theorie zusammengestellten Axiome einen sehr weiten Rahmen oder einen Kern liefern, den man für praktische Zwecke durch "Spezialgesetze" ergänzen muß. Die Idee ist hier, daß in speziellen Anwendungen weitere Informationen über die Nutzenfunktion zur Verfügung stehen, etwa in der Art der Gesetze vom normalen Nutzenzuwachs oder vom abnehmenden Grenznutzen. Man muß für verschiedene Anwendungen auch verschiedene Gesetze benutzen. Daß diese verschiedenen Gesetze trotzdem zu einer gemeinsamen Theorie gehören, kommt dadurch zum Ausdruck, daß sie "Spezialisierungen" eines und desselben Kerns oder Rahmens sind. Die Grundaxiome der Theorie stecken zunächst nur diesen Rahmen ab. Wenn die empirische Behauptung mit diesen Grundaxiomen trivial ist, so zeigt dies nur, wie allgemein der Rahmen gewählt wurde. Er wurde so allgemein gewählt, daß er noch alle Spezialisierungen zuläßt.

Man kann sich dies auch anschaulich vorstellen. Wie in Kap.I zeichnen wir die drei Komponenten M_p, M und M_{pp} auf zwei Ebenen -der theoretischen und der nicht-theoretischen- , die durch die "Abhackfunktion" r miteinander verbunden sind (siehe Figur 11). M_{pp}(ÖKO) entsteht, indem man von allen Strukturen in M_p(ÖKO) die Nutzenfunktion wegnimmt und die Redukte in einer Menge -eben M_{pp}- versammelt. Die Redukte der Modelle bilden die Menge $\bar{r}(M) \subseteq M_{pp}$. Im allgemeinen stellt $\bar{r}(M)$ eine bestimmte Auswahl aus M_{pp} dar. $\bar{r}(M)$ ist eine Menge nicht-theoretischer,also theorieunabhängig bestimmbarer Strukturen,die mit den Axiomen der Tauschwirtschaft verträglich sind,d.h.die durch Reduktbildung aus Modellen erhältlich sind,oder anders: die sich durch Hinzunehmen von Nutzenfunktionen zu Modellen ergänzen lassen.Die empirische Behauptung besagt,daß die theorieunabhängig gegebene Menge I der intendierten Anwendungen in M_{pp} so liegt,daß sie dort Teilmenge von $\bar{r}(M)$ ist: $I \subseteq \bar{r}(M)$.Die Behauptung ist falsch,wenn es nicht-theoretische, also partielle Tauschwirtschaften gibt,die zwar intendierte Anwendungen sind,die sich aber nicht durch Nutzenfunktionen zu Modellen ergänzen lassen.(Siehe Figur 11).Wenn man beweisen kann,daß jede partielle Tauschwirtschaft zu einem Modell ergänzt werden kann,liegt die Situation von Figur 12) vor.

Fig.11

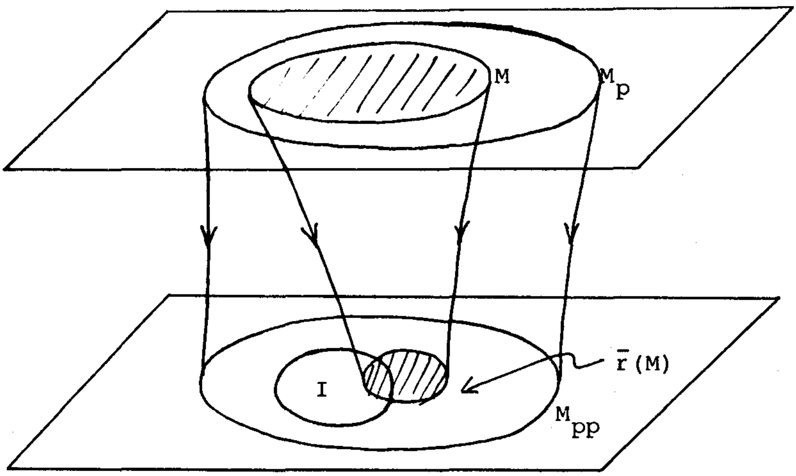
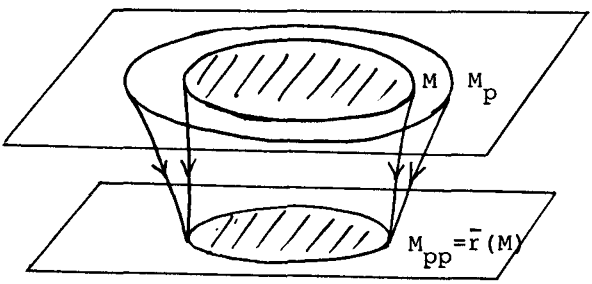


Fig.12



Die Menge der Redukte von M,$\bar{r}$(M),ist dann schon ganz M_{pp}. Offenbar ist hier die empirische Behauptung richtig,gleichgültig wie I aussieht.Denn I ist jedenfalls Teilmenge von M_{pp} (ÜII-23).

Bei der Tauschwirtschaft in unserer Formulierung liegt jedoch nicht dieser einfache Fall vor.Wir müssen vielmehr im letzten Absatz M_{pp} durch die Menge M^{o}_{pp} der partiellen Tauschwirtschaften,die alle nicht-theoretisch formulierbaren Axiome erfüllen,ersetzen,um ein zutreffendes Bild zu bekommen.Wir wissen dann nach TII-10),daß $\bar{r}(M)=M^{o}_{pp}$ ist und man kann leicht sehen,daß die Modelle tatsächlich einen Rahmen liefern,der so allgemein ist,daß jede formale Spezialisierung hineinpaßt. Unter einer formalen Spezialisierung von ÖKO verstehen wir hier eine Teilmenge Σ von M_p(ÖKO): $\Sigma \subseteq M_p$(ÖKO).Dann gilt trivialerweise: $\bar{r}(\Sigma) \subseteq \bar{r}(M_p)=M_{pp}$.Der von den <u>Modellen</u> gelieferte "nicht-theoretische" Rahmen M^{o}_{pp} ist gegenüber M_{pp} kaum enger.Er schließt ja nur solche Strukturen aus,die "$q^e \in EB_x$" nicht erfüllen.Alle formalen Spezialisierungen,die dieses Axiom erfüllen (und das sind alle interessanten),passen auch in den von M(ÖKO) gelieferten Rahmen,d.h.für sie gilt $\bar{r}(\Sigma) \subseteq M^{o}_{pp}=\bar{r}(M)$.In diesem präzisen Sinn kann man den von den Modellen gelieferten Rahmen $\bar{r}$(M) als weit genug bezeichnen.

Noch klarer wäre die Situation bei absoluter Gehaltlosigkeit,weil dann $\bar{r}(M)=M_{pp}$ gilt.Eine formale Spezialisierung wäre unverträglich mit dem "von M abgesteckten Rahmen",wenn $\bar{r}(\Sigma)$ keine Teilmenge von $\bar{r}$(M) wäre.Dies könnte nur gelten,wenn $\bar{r}(M) \subset M_{pp}$ (ÜII-24),was aber im Fall absoluter Gehaltlosigkeit zu einem Widerspruch führt.

Der normale Gebrauch einer relativ gehaltlosen Theorie liegt,wie schon gesagt,darin,daß man in spziellen Anwendungen spezielle Gesetze hinzufügt.Nimmt man solche Spezialgesetze als zusätzliche Axiome in die Theorie auf,so entsteht eine neue Theorie,deren empirische Behauptung in der Regel nicht mehr trivial ist.Wie gesagt: dies ist die Regel.Die Tauschwirtschaft scheint eine Ausnahme von dieser Regel zu bilden. Es gibt nämlich bisher keine Spezialgesetze,die zu einer nicht-trivialen empirischen Behauptung führen.Alle bisher erwähnten Spezialisierungen,das Gesetz vom normalen Nutzenzuwachs,das Gesetz vom abnehmenden Grenznutzen und auch die Stone-Geary Nutzenfunktion ändern nichts am relativen empirischen Gehalt,d.h.grob gesprochen,an der Wahrheit der empirischen Behauptung der Tauschwirtschaft.Wir stellen daher folgende Hypothese auf.

> Für alle ökonomisch interessanten Spezialgesetze $\mathcal{L}$(U) gilt:
> für alle $y \in M_{pp}^{o}$ gibt es U,sodaß $\langle y,U\rangle \in M$ und $\mathcal{L}(U)$

Das heißt,für alle interessanten Spezialgesetze $\mathcal{L}$ gilt,daß auch die durch $\mathcal{L}$ verschärfte Theorie keinen empirischen Gehalt hat.

Dies mag einer der Gründe,vielleicht der wichtigste Grund, dafür sein,daß die Tauschwirtschaft als empirische Theorie bisher so wenig erfolgreich war.Es ist bisher nicht gelungen, mit Hilfe der Theorie bessere Voraussagen zu machen,als ein guter Geschäftsmann mit etwas Fingerspitzengefühl.Dieser Mangel an empirischem Erfolg mag dazu geführt haben,daß die Tauschwirtschaft und alle ihre Versionen,in der der Begriff des Nutzens zentral ist,mehr als "reine" Theorie und weniger anwendungsbezogen betrieben wird und wurde.Unter einer <u>reinen Theorie</u> wollen wir eine Theorie verstehen,die von vornherein nicht darauf abzielt,konkrete intendierte Anwendungen zu beschreiben und zu erklären.Ihr Ziel ist vielmehr,ein theoretisches Bild zu entwerfen,das einen bestimmten Phänomenbereich in hilfreicher und interessanter Weise strukturiert.Wenn man die Geschichte der Tauschwirtschaft und allgemeiner der Nutzentheorie studiert,findet man nur selten Anwendungen auf konkrete ökonomische Systeme.Statt dessen werden meist "interessante" Theoreme bewiesen,etwa in der Art von TII-1).Argumentationen für oder gegen die Richtigkeit der Theorie stammen selten aus empirischen Untersuchungen,aus gesammelten oder gemessenen Daten,sondern nehmen Bezug auf die Allgemeinheit,die Plausibilität und Eleganz solcher Theoreme.

Es scheint daher angebracht,nebem dem Begriff der empirischen Theorie auch den Begriff der reinen Theorie zu benutzen.Dabei muß das Wort "reine Theorie" nicht unbedingt einen negativen Beigeschmack erzeugen.Auch reine Theorien haben ihren Zweck.Wir können hier allerdings nicht näher auf solche Zwecke eingehen.

Wenn man die Tauschwirtschaft von vornherein als reine Theorie ansieht,so sind einige der gemachten Unterscheidungen hinfällig.Es ist z.B. nicht mehr nötig,die Unterscheidung zwischen theoretischen und nicht-theoretischen Größen an deren Meßmethoden festzumachen.Denn gemessen soll ja in einer reinen Theorie nicht werden.Auch intendierte Anwendungen braucht man nicht.Die Frage ist,ob die Unterscheidung von theoretisch und nicht-theoretisch auch aufzugeben ist.Diese Frage muß zur Zeit als offen angesehen werden.

QUERVERBINDUNGEN UND CETERIS PARIBUS KALUSEL

Ein zweiter wichtiger Grund für den empirischen Mißerfolg der Tauschwirtschaft besteht darin,daß ein Teil der Objekte, nämlich die Personen,in ihren für die Tauschwirtschaft relevanten Eigenschaften nicht konstant bleiben.Hier hat es etwa die Mechanik,die sich mit Teilchen konstanter Masse,Größe und Gestalt beschäftigt,leichter.Die ökonomischen Eigenschaften der Personen,die man kennen muß,um ihre Nutzenfunktionen aufzustellen,ändern sich praktisch ständig.Sowohl Charaktereigenschaften,als auch Geschmack und Verbrauchsgewohnheiten sind einem stetigen Wandel unterworfen.Es ist auch schwierig,eine Grenze zu ziehen zwischen ökonomisch relevanten Eigenschaften einer Person und den ökonomisch relevanten Einflüssen,denen eine Person ausgesetzt ist und solchen Einflüssen und Eigenschaften,die ökonomisch nicht relevant sind.Diese Schwierigkeiten werden oft in ökonomischen Argumenten durch eine sogenannte "ceteris paribus Klausel" umgangen.In solchen Argumenten geht es um die Übertragung von Daten,die für eine bestimmte Situation bekannt oder emittelt sind,auf eine andere Situation.Die andere Situation kann dabei mit der ursprünglichen auf verschiedene Weise zusammenhängen.Sie kann aus der ursprünglichen Situation durch einfache zeitliche Fortsetzung oder durch Abänderung bestimmter Größen "von außen" oder durch Änderung bestimmter Größen innerhalb des Systems oder durch "gezielte Änderung der Größen durch den Ökonomen" entstehen.

Das Dorf in Beispiel 3) etwa könnte erstens drei Jahre später betrachtet werden,zweitens könnte man dort eine Goldmine finden,drittens könnte durch Täusche eine neue Situation entstehen und viertens könnte ein Ökonom (dies ist natürlich fiktiv) eine Umverteilung der Gütermengen unter den Personen vornehmen.Bei allen möglichen Änderungen könnte die ökonomische Beschreibung davon profitieren,maximal viel Information aus der ursprünglichen Situation zu übernehmen.Man erhält dann für die neuen Situationen Erklärungen des ökonomischen Geschehens unter der Annahme,daß sich außer den spezifizierten Änderungen sonst nichts geändert habe.Das heißt,man nimmt an, alle anderen (nicht spezifizierten) Faktoren seien gleich geblieben (daher der Name "ceteris paribus").

Bei Kenntnis der Struktur der Tauschwirtschaft und wenn man nur über solche Strukturen redet,reduziert sich das Problem. Die ganze mit dem Menschen verbundene Vielfalt und Veränderung der Faktoren ist lokalisiert in der Nutzenfunktion.Die ceteris paribus Klausel wird dann zur "Voraussetzung der Konstanz der Nutzenfunktion".

Um einzusehen,warum die Verletzung dieser Klausel in der Realität die Lage für die Tauschwirtschaft so schwierig macht, wollen wir untersuchen,wozu man sie benutzen könnte,falls man sie zu Recht annehmen könnte.Wären die Menschen tatsächlich so beschaffen,daß man beim Übergang von einem ökonomischen System zu einem anderen,wobei gewisse Personen in beiden Systemen vorkommen,voraussetzen kann,daß sich die Nutzenfunktionen dieser Personen nicht ändern,so böten sich viele Möglichkeiten zur Erforschung der Nutzenfunktionen.Man bräuchte ja nur eine Person in viele verschiedene Situationen zu bringen und dort zu beobachten bzw.zu testen.Hätte man in einem Modell ihre Nutzenwerte oder Nutzenverhältnisse für bestimmte Gütermengen ermittelt,so könnte man diese im nächsten System schon voraussetzen und mit ihrer Hilfe Nutzenwerte für neue Gütermengen herausfinden.

Man könnte die Möglichkeit des Übergangs von einem Modell zu einem anderen durch ein Gesetz höherer Ordnung,eine Querverbindung,ausdrücken,welches besagt,daß der Nutzen einer Person sich nicht ändert,wenn diese Person von einem Modell in ein anderes Modell überwechselt.Die Modelle überlappen sich dann bei dieser Person.Solche Querverbindungen spielen in anderen Theorien eine wichtige Rolle.Wir wollen deshalb die für die Tauschwirtschaft relevanten Querverbindungen betrachten,obwohl uns klar ist,daß sie in der Realität nicht oder nur in sehr geringem Maß bestehen.Eine Querverbindung bezieht sich auf verschiedene (potentielle) Modelle und stellt Bedingungen für den Fall,daß sich diese Modelle überlappen.

DII-21 In einer Menge X potentieller Tauschwirtschaften gilt die Querverbindung gdw
für alle $x,x' \in X$ und alle π : wenn $\pi \in J \cap J'$,
dann $U_\pi = U'_\pi$

Dabei ist durch die Bezeichnung schon klar,daß J und U_π zu x gehören und J' und U'_π zu x'.

Die Querverbindung zeichnet also Mengen potentieller Tauschwirtschaften X aus.Wir können uns auf potentielle Modelle beschränken,denn Querverbindungen sind hier,wie auch in anderen Theorien,unabhängig von den in den Modellen geltenden Gesetzen (wie sie durch die Axiome ausgedrückt werden).

Man könnte die Querverbindung für U als Umschreibung der Forderung ansehen,daß der Nutzen eine "innere" Eigenschaft der Personen sei.Denn innere Eigenschaften von Personen ändern sich nicht dadurch,daß diese Personen sich in verschiedenen "äußeren" Umgebungen befinden.

Wir vermuten,daß bei Hinzunahme dieser Querverbindung zur Tauschwirtschaft eine Theorie entsteht,die relativen empirischen Gehalt hat.Diese Vermutung wird auch durch einige Experimente gestützt.Allerdings muß man zunächst einmal klar formulieren,was man damit meint,weil die Querverbindungen,als Aussage über verschiedene potentielle Modelle,nicht einfach in Form eines Zusatzaxioms bei der Definition der Modelle eingeführt werden können.Für eine genauere Formulierung siehe (ÜII-25).Auch dieser -formal mögliche- zweite Weg,ÖKO zu einer empirisch gehaltvollen Theorie zu machen,nämlich der über Querverbindungen,erweist sich als wenig fruchtbar,weil sich die Annahme der Querverbindung in der Regel als falsch herausstellt.Die Nutzenfunktionen der Individuen ändern sich ständig.

Zusammen mit unseren Überlegungen über Spezialisierungen ergibt sich also,daß die Tauschwirtschaft wenig Chancen hat,zu einer empirisch gehaltvollen Theorie zu werden.

ÜBUNGEN ZU KAPITEL II

(ÜII-1): Ein Beispiel: Hänschen hat 17 Flugzeuge und drei Schlagersänger,Susanne 12 Schlagersänger und 4 Flugzeuge.Die Menge J der Personen ist J={Hänschen,Susanne},die Menge G der Güterarten G={Flugzeug,Schlagersänger}.Die vorkommenden Gütermengen sind 17 (Flugzeuge),3 (Schlagersänger),12 (Schlagersänger) und 4 (Flugzeuge).Die Gütermengen sind wie folgt auf die Personen verteilt

Person π	Güterart γ	Gütermenge,die π von γ besitzt
Hänschen	Flugzeug	17
Hänschen	Schlagersänger	3
Susanne	Flugzeug	4
Susanne	Schlagersänger	12

Diese Liste kann man auch wie folgt schreiben

q(Hänschen,Flugzeug)=17
q(Hänschen,Schlagersänger)=3
q(Susanne,Flugzeug)=4
q(Susanne,Schlagersänger)=12,

wobei $q(\pi, \gamma)=\alpha$ zu lesen ist als "Person π besitzt von Güterart γ die Menge α".

<u>Situationsbeschreibung</u>: Für Maria,Heinz und Renate liegen unter dem Weihnachtsbaum folgende Geschenke: 5 Bücher,2 Fotoapparate,1 Armbanduhr und 14 Tafeln Schokolade.Davon bekommt Maria 2 Bücher,4 Tafeln Schokolade,1 Fotoapparat.Renate bekommt 1 Buch,1 Armbanduhr und 6 Tafeln Schokolade.Heinz bekommt den Rest.

(1) Bilde die Menge J der beteiligten Personen.
(2) Bilde die Menge G der Güterarten.
(3) Welche Gütermengen kommen nach der Verteilung vor?
(4) Vervollständige die folgende Liste:

Person π	Güterart γ	Gütermenge α, die π von γ besitzt
Maria	Bücher	2
Maria	Armbanduhr	0
⋮	⋮	⋮

(5) Schreibe die Liste von (4) um in eine Anzahl von Gleichungen der Form $q(\pi,\gamma)=\alpha$, z.B. q(Maria,Bücher)=2.

(ÜII-2): (1) Formalisiere die Liste aus UII-1-(5). (Benutze π_1,π_2,π_3 als Zeichen für die Personen und $\gamma_1,\ldots,\gamma_4$ für die Güter).

(2) Wenn $J=\{\pi_1,\pi_2,\pi_3\}$ und $G=\{\gamma_1,\ldots,\gamma_4\}$ ist, kommt dann jedes Paar $\langle\pi,\gamma\rangle$ mit $\pi\in J$ und $\gamma\in G$ in der formalisierten Liste von (1) vor? Kommt irgendein solches Paar öfter vor?

(3) Beweise, daß man bei sukzessiver Befolgung der folgenden Zuordnungsvorschrift

> "Finde anhand der Situationsbeschreibung von ÜII-1 für jede Person und jede Güterart diejenige Menge dieser Güterart, die diese Person bekommt"

die Liste aus (1) erhält. Zeige, daß durch Befolgung der Vorschrift <u>nur</u> Gleichungen entstehen, die in der Liste vorkommen. Die Liste ist also äquivalent zu dieser Zuordnungsvorschrift.

(4) Bilde die Menge q aller Tripel $\langle\pi,\gamma,\alpha\rangle$, für die $\pi\in J$, $\gamma\in G$ und $\alpha\in\mathbb{R}_0^+$ eine aus einer Gleichung $q(\pi,\gamma)=\alpha$ der Liste in (1) entnommene Zahl ist. Zeige: $q\subseteq J\times G\times\mathbb{R}_0^+$. Beweise:

a) Für alle $\pi\in J$ und alle $\gamma\in G$ gibt es ein $\alpha\in\mathbb{R}_0^+$ mit $\langle\pi,\gamma,\alpha\rangle\in q$.

b) Wenn $\langle\pi,\gamma,\alpha\rangle\in q$ und $\langle\pi,\gamma,\alpha'\rangle\in q$, dann ist $\alpha=\alpha'$.

q ist also eine Funktion $q: J\times G\to\mathbb{R}_0^+$.

(ÜII-3): Fertige anhand der Situationsbeschreibung von ÜII-1 für jedes $\pi\in J$ eine Liste q_π der Gütermengen, die π hat. Beweise, daß für jedes $\pi\in J$ die Mengen $\{q_\pi(\gamma)/\gamma\in G\}$ und $\{q(\pi,\gamma)/\gamma\in G\}$ gleich sind.

(ÜII-4): In ÜII-1 bezeichne γ_1 Bücher, γ_2 Fotoapparate, γ_3 Armbanduhren, γ_4 Schokolade und π_1 Maria, π_2 Renate, π_3 Heinz.

Marias Nutzenfunktion U_{π_1} (oder einfach U_1) wird definiert durch $U_1(\alpha_1,..,\alpha_4):=3\alpha_1+20\alpha_2+18\alpha_3+\alpha_4$.

Genauso definieren wir die Nutzenfunktionen von Renate und Heinz.

$$U_2(\alpha_1,..,\alpha_4):=2\alpha_1+19\alpha_2+21\alpha_3+2\alpha_4$$

$$U_3(\alpha_1,..,\alpha_4):=3\alpha_1+25\alpha_2+10\alpha_3+1/2\alpha_4.$$

(1) Berechne die Nutzenwerte für die Gütermengen,die in den Listen q_π von ÜII-3 vorkommen.

(2) Wie würden die Nutzen aussehen,wenn die Güter nicht wie in der Situationsbeschreibung von ÜII-1,sondern wie folgt verteilt wären?

Person π	Güterart γ	Gütermenge $\alpha=q(\pi,\gamma)$
1	1	3
1	2	0
1	3	1
1	4	5
2	1	2
2	2	1
2	3	0
2	4	5
3	1	0
3	2	1
3	3	0
3	4	4

(3) Wir definieren $U:J\times \mathbb{R}^4\rightarrow \mathbb{R}_o^+$ durch

$$U(\pi,\alpha_1,..,\alpha_4)=\begin{cases} 3\alpha_1+20\alpha_2+18\alpha_3+\alpha_4 & ,\text{falls } \pi=\pi_1 \\ 2\alpha_a+19\alpha_2+21\alpha_3+2\alpha_4 & ,\text{falls } \pi=\pi_2 \\ 3\alpha_1+25\alpha_2+10\alpha_3+1/2\alpha_4 & ,\text{falls } \pi=\pi_3. \end{cases}$$

Berechne $U(\pi,q_\pi(\gamma_1),..,q_\pi(\gamma_4))$ für $\pi=\pi_1,..,\pi_3$ mit q_π wie in ÜII-3.Zeige,daß die berechneten Werte mit denen von (1) übereinstimmen.

(ÜII-5): Welchen Satz muß man beweisen,um zu zeigen,daß eine Funktion $f: \mathbb{R}\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist? Was muß man ändern für

$f:]\alpha,\beta[\to \mathbb{R}$ mit $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ und $]\alpha,\beta[=\{x \in \mathbb{R}/\alpha < x < \beta\}$? Welchen Satz muß man beweisen,um zu zeigen,daß $f: X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im zweiten Argument differenzierbar ist? (Man redet hier auch von partieller Differenzierbarkeit.)

(ÜII-6): π besitzt folgende Ausstattung q_π: 100 kg Birnen, 10 Liter Milch,1000 kg Kartoffeln,20 Hühner und 3 Kühe.Die gerade geltenden Preise sind DM 2.- für 1 kg Birnen,DM -.98 für 1 Liter Milch,DM -.50 für 1 kg Kartoffeln,DM 3,50 für 1 Huhn und etwa DM 1000.- für eine Kuh.Berechne den Wert von π's Besitz.

(ÜII-7): (1) π aus ÜII-6 tauscht wie folgt:
50 kg Birnen gegen 150 kg Getreide
7 Liter Milch gegen 3 Maß Bier
800 kg Kartoffeln gegen 1 gebrauchtes Motorrad.
Getreide kostet DM 0,66 pro kg,Bier DM 2,30 das Maß und das Motorrad DM 400.-.Berechne den Wert von π's Ausstattung q'_π nach dem Tausch.Hat π beim Tausch die Wertbedingung erfüllt?
(2) Beschreibe einen Tausch von drei Gütern gegen drei andere Güter,sodaß die Wertbedingung zwar für den Gesamtwert aller drei Güter erfüllt ist,nicht aber für jedes einzelne Paar von Gütern.

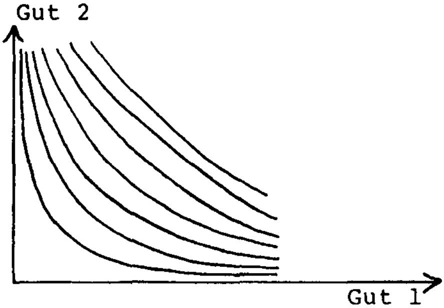
(ÜII-8): Sei $G=\{\gamma,\gamma'\}$,$J=\{\pi,\pi'\}$,$p(12\gamma)=1=p(2\gamma')$ und q^a beliebig.Beweise: Erfüllt q die EB,so gibt es $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$,sodaß einer der beiden folgenden Fälle vorliegt:
1) $q(\pi,\gamma)=q^a(\pi,\gamma)+\alpha$ und $q(\pi,\gamma')=q^a(\pi,\gamma')-1/6\alpha$
2) $q(\pi,\gamma)=q^a(\pi,\gamma)-\alpha$ und $q(\pi,\gamma')=q^a(\pi,\gamma')+1/6\alpha$.

(ÜII-9): Zeichne für die in ÜII-8 gegebene Situation für beide Personen ein Diagramm wie in Figur 8) mit γ auf der horizontalen Achse,wobei $q^a_\pi(\gamma)=4$,$q^a_\pi(\gamma')=6$,$q^a_{\pi'}(\gamma)=5$ und $q^a_{\pi'}(\gamma')=4$.
(1) Stelle die Geradengleichung für die beiden Geraden B^π und $B^{\pi'}$ auf.
(2) Zeige: Jede Verteilung $q=\langle q_\pi,q^a_\pi\rangle$,für die q_π auf B^π liegt,erfüllt die EB.

(3) Zeige: Jede Verteilung $q=\langle q_\pi, q_{\pi'}\rangle$, für die q_π auf B^π und $q_{\pi'}$ auf $B^{\pi'}$ liegt, erfüllt die EB.
(4) Für jede Verteilung $q=\langle q_\pi, q_{\pi'}\rangle$, die die EB erfüllt, liegt q_π auf B^π und $q_{\pi'}$ auf $B^{\pi'}$ (benutze ÜII-8).

(ÜII-10): (1) Stelle für zwei Güterarten ($G=\{1,2\}$) und eine Person den "Güterraum", d.h. die Menge aller möglichen Güterausstattungen, zeichnerisch dar (eine Ausstattung ist ein Punkt einer Ebene.)
(2) Stelle eine Nutzenfunktion für die Person in (1) graphisch dar. (Benutze (1), trage die Funktionswerte entlang einer Zahlengeraden senkrecht zum Güterraum ein.) Wie nennt man ein Gebilde wie das, das aus der Menge der Tripel $\langle \alpha_1, \alpha_2, U_\pi(\alpha_1, \alpha_2)\rangle$ besteht?
(3) Es sei F eine Fläche, die nicht in einer Ebene E liegt. Auf F sei irgendeine Linie L eingezeichnet.
Was bedeutet es, L auf E zu projezieren? Was ist die Projektion von L auf E?
(4) Zeichne in einem 3-dimensionalen Koordinatensystem eine Fläche über der durch zwei Achsen aufgespannten Ebene E. Interpretiere das Bild als Darstellung einer Nutzenfunktion.
(5) Zeichne in (4) eine Linie auf die Fläche, sodaß alle Punkte auf L gleichen Abstand zur Ebene E haben. Projeziere L auf die Ebene E. L heißt Isoquante.
(6) Wie muß die Fläche in (4) aussehen, damit die Projektionen der Isoquanten wie in Figur 13) aussehen? Zeichne in Figur 13) eine EB ein.

Fig.13



(7) Beweise in der Situation von (6) mit graphischen Mitteln: Wenn q^e eine Gleichgewichtsverteilung ist,so bildet die EB eine Tangente an die Projektion einer Isoquante mit q^e als Berührpunkt.

(ÜII-11): Sei $x=<J,G,p,q^a,q^e,U>\in M(ÖKO)$ und für alle $\pi\in J$, $\gamma\in G$ gelte $q^e(\pi,\gamma)>0$.Für $i\leq n$ bezeichnen wir mit D_iU_π die i-te partielle Ableitung von U_π.

(1) Zeige: Für alle $\pi\in J$ gibt es $\lambda_\pi\in\mathbb{R}$,sodaß für alle $i\leq n$:

$$D_iU_\pi(q^e_\pi(\gamma_1),..,q^e_\pi(\gamma_n))=\lambda_\pi\cdot p(\gamma_i).$$

(Definiere $h_\pi(\alpha_1,..,\alpha_n):=\sum_{i\leq n} p(\gamma_i)[\alpha_i-q^a(\pi,\gamma_i)]$.Zeige,daß U_π auf $\{\mathfrak{r}/h_\pi(\mathfrak{r})=0\}\cap(\mathbb{R}^+)^n$ ein Maximum hat.Wende den Satz über Lagrangesche Multiplikatoren an.Vergleiche z.B.[Erwe, 1968],S.350.)

(2) Formuliere und beweise das Analogon zu TII-1b) im Text mit D_iU_π anstelle von Δ_iU_π (benutze (1)).

(3) Sei $\pi\in J$ und $\mathfrak{A}$ die Matrix $\mathfrak{A}=(\alpha_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ mit den Koeffizienten $\alpha_{ij}=D_iD_jU_\pi(q^e_\pi(\gamma_1),..,q^e_\pi(\gamma_n))$.Ist $\det(\mathfrak{A})\neq 0$, so gibt es eine Umgebung V von $<p(\gamma_1),..,p(\gamma_n)>$ in $\mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f:V\to\mathbb{R}^n$ mit $f(p(\gamma_1),..,p(\gamma_n))=<q^e_\pi(\gamma_1),...,q^e_\pi(\gamma_n)>$. (Wähle $\lambda=\lambda_\pi$ wie in (1) und definiere $h_\pi:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^n$ durch $h_\pi(\alpha_1,..,\alpha_n,\beta_1,..,\beta_n):=$

$$<D_1U_\pi(\beta_1,..,\beta_n)-\lambda\alpha_1,...,D_nU_\pi(\beta_1,..,\beta_n)-\lambda\alpha_n>.$$

Es gibt Umgebungen W von $<p(\gamma_1),..,p(\gamma_n)>$ und W' von $<q^e_\pi(\gamma_1),..,q^e_\pi(\gamma_n)>$,sodaß für alle $<\mathfrak{r},\mathfrak{y}>\in W\times W'$:

$\det(\frac{\partial h_\pi}{\partial\mathfrak{y}}(\mathfrak{r},\mathfrak{y}))\neq 0$.Wende auf h_π den Satz über implizite Funktionen an.Vergleiche z.B.[Erwe,1968],S.322.)

(ÜII-12): (1) Definiere: "A ist eine Voraussage (über zu tauschende Gütermengen) im Rahmen der Tauschwirtschaft".(A soll ein Satz sein,der nur Begriffe der Tauschwirtschaft enthält.)

(2) Läßt sich A in (1) auch als "Erklärung" der vorausgesagten

Tauschmengen auffassen? Was würde bei einer solchen Auffassung von A erklärt?

(ÜII-13): Es sei $X \in M(\text{ÖKO})$ und $J=\{\pi\}$, $G=\{1,2\}$, $p(1)=1=p(2)$, $q_\pi^a(1)=3$, $q_\pi^a(2)=1$ und $U_\pi(\alpha_1,\alpha_2)=\ln(\alpha_1+1)+\ln(\alpha_2+1)$, wobei ln den natürlichen Logarithmus bezeichnet.

(1) Berechne das Verhältnis von $q_\pi^e(1)$ zu $q_\pi^e(2)$. (Benutze (1) von ÜII-11).

(2) Berechne q_π^e mittels (1) und der EB.

(3) Zeige, daß U_π bei q_π^e ein relatives Maximum hat. (Benutze ÜII-11-(3) oder das Theorem: Wenn $\alpha,\alpha_1,\alpha_2>0$ und $\alpha_1+\alpha_2=\alpha$, dann ist $\ln(\alpha_1+1)+\ln(\alpha_2+1)\leq(\ln(\alpha/2))^2$.)

(4) Liefert diese Berechnung eine Voraussage im Sinn von ÜII-12?

(ÜII-14): Sei $x=\langle J,G,p,q^a,q^e,U\rangle$ wie folgt definiert. $J=\{\pi,\pi'\}$, $G=\{1,2\}$, $p(1)=p(2)=1$, $q_\pi^a(\pi^*,i)=1/2$ für $\pi^*\in J$ und $i\in G$, $q_\pi^e=q_\pi^a$, $U_\pi(\alpha_1,\alpha_2)=U_{\pi'}(\alpha_1,\alpha_2)=\alpha_1+\alpha_2$. Zeige:

(1) $x\in M(\text{ÖKO})$.

(2) Mit $p'(1)=p'(2)=2$ ist auch $\langle J,G,p',q^a,q^e,U\rangle\in M(\text{ÖKO})$.

(3) Mit $\bar{q}^a(\pi,1)=\bar{q}^a(\pi',2)=1/4$ und $\bar{q}^a(\pi,2)=\bar{q}^a(\pi',1)=3/4$ ist auch $\langle J,G,P,\bar{q}^a,q^e,U\rangle\in M(\text{ÖKO})$.

(4) Mit $\bar{q}^e:=\bar{q}^a$ ist auch $\langle J,G,P,q^a,\bar{q}^e,U\rangle\in M(\text{ÖKO})$.

(5) Mit $U'_\pi(\alpha_1,\alpha_2)=U'_{\pi'}(\alpha_1,\alpha_2):=\alpha_1\cdot\alpha_2$ ist auch
$\langle J,G,p,q^a,q^e,U'\rangle\in M(\text{ÖKO})$.

(ÜII-15): Zeige: Für alle $\gamma_i\in G$: $\sum_{\pi\in J} q^a(\pi,\gamma_i)=\sum_{\pi\in J} q^e(\pi,\gamma_i)$ gdw $An_i=Na_i$.

(ÜII-16): Es sei $n\geq 2$ und für $\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_n\rangle,\langle\beta_1,\ldots,\beta_n\rangle\in\mathbb{R}^n$ definieren wir: ($\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_n\rangle\leq\langle\beta_1,\ldots,\beta_n\rangle$ gdw für alle $i\leq n$: $\alpha_i\leq\beta_i$). Zeige: $\leq$ ist keine Ordnung auf $\mathbb{R}^n$ im Sinne von ÜI-10. Welches Axiom ist verletzt? Um anzudeuten, daß eine Ordnung dieses Axiom erfüllt, bezeichnet man die zugrundeliegende Menge auch als vollständig geordnet oder total geordnet.

(ÜII-17): Für i=1,2,3,4 sei $U_i:(\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $U_1(\alpha_1,\alpha_2)=\alpha_1+\alpha_2$, $U_2(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)$, $U_3(\alpha_1,\alpha_2)=e^{\alpha_1}+e^{\alpha_2}$ $U_4(\alpha_1,\alpha_2)=\ln(\alpha_1+e)+\ln(\alpha_2+e)$. (Dabei ist e die Eulersche Zahl.)

(1) Zeige: U_i hat normale Form.

(2) Zeige: Zu jedem U_i gibt es unendlich viele verschiedene U_i', die "gleiche Form" haben. (Füge geeignete Konstanten in die Definitionen von U_i ein.)

(ÜII-18): (1) Stelle die Funktion $\ln: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ (Logarithmus) zeichnerisch dar.

(2) Beweise: Sind $\alpha,a,b \in \mathbb{R}^+$ mit $a < b$ und $0 < \alpha < 1$, so ist $\alpha\ln(a)+(1-\alpha)\ln(b) < \ln(\alpha a+(1-\alpha)b)$. (Benutze ein Lehrbuch der Analysis.)

(3) Stelle die Punkte $\alpha a+(1-\alpha)b$ und $\alpha\ln(a)+(1-\alpha)\ln(b)$ für $\alpha=1/4,1/2,3/4$, $a=1$ und $b=2$ auf der Zeichnung von (1) dar.

(4) Zeige: Die Punkte $\alpha\ln(a)+(1-\alpha)\ln(b)$ aus (3) liegen auf einer Geraden durch a und b.

(ÜII-19): (1) Zeichne die Funktion f, definiert durch $f(\alpha):= \beta\cdot\ln(\alpha-\delta)$ für $\beta=2$ und $\delta=4$. Für welche α ist f definiert? (Benutze ÜII-18-(1)).

(2) Welche anschauliche Bedeutung haben β und δ ?

(3) Bestimme den Nutzen von Person π bei $G=\{1,2\}$ und Ausstattung $\langle e,e\rangle$, wenn $U_\pi(\alpha_1,\alpha_2)=\ln(\alpha_1)+\ln(\alpha_2)$ und e die Eulersche Zahl ist.

(ÜII-20): Es sei $x \in M_p(\text{ÖKO})$ mit $J=\{j\}$.

(1) Zeige: EB_x läßt sich als eine Menge W von Wettsystemen über einer geeigneten Grundmenge von Alternativen auffassen. (Wähle A:=G, zu $q \in EB_x$ definiere w_q durch

$$w_q(\{b\})=q(j,b)/q^*(j,b) \quad \text{mit}$$

$$q^*(j,b):=(\sum_{i\in G} p(i)q^a(j,i))/p(b).)$$

(2) Definiere eine Funktion f, die jedem Element von W aus (1) das zugehörige Element von EB_x zuordnet. Zeige, daß f bijektiv ist.

(ÜII-21): Es sei M_{pp} wie im Text.
(1) Definiere für die Tauschwirtschaft die Klasse M^{o}_{pp} aller nicht-theoretischen Strukturen, in denen alle im nicht-theoretischen Vokabular formulierbaren Axiome erfüllt sind.
(2) Zeige: $M^{o}_{pp} \subseteq M_{pp}$.
(3) Präzisiere mittels M_{pp}, M^{o}_{pp}, M und der Funktion r: "Die Tauschwirtschaft hat keinen absoluten empirischen Gehalt" und "Die Tauschwirtschaft hat keinen relativen empirischen Gehalt".
(4) Beweise: Aus $\forall y \in M_{pp} \exists x(r(x)=y \wedge x \in M)$ folgt $\forall y \in M^{o}_{pp} \exists x(r(x)=y \wedge x \in M)$.
(5) Zeige: Wenn die Tauschwirtschaft relativen empirischen Gehalt hat, so hat sie auch absoluten. (Benutze (4)).

(ÜII-22): (1) Sind J und G endliche Mengen, $p:G \rightarrow \mathbb{R}^{+}$ und $q^{a}:J \times G \rightarrow \mathbb{R}^{+}_{0}$ gegeben, so gibt es q^{e} und U derart, daß $\langle J,G,p,q^{a},q^{e},U\rangle$ eine Tauschwirtschaft ist. (Wähle $q^{e}:=q^{a}$, definiere U so, daß für alle $\pi \in J$ U_{π} im Punkt $\langle q^{a}_{\pi}(\gamma_{1}),\dots,q^{a}_{\pi}(\gamma_{n})\rangle$ ein absolutes Maximum annimmt.)
(2) Zeige: Die Tauschwirtschaft hat keinen relativen empirischen Gehalt (d.h. $M^{o}_{pp}=\bar{r}(M)$ mit M^{o}_{pp} wie in ÜII-21).
(3) Zeige: Die Tauschwirtschaft hat absoluten empirischen Gehalt. (Wähle ein geeignetes q^{e}.)

(ÜII-23): (1) Beweise: (für alle $Y \subseteq M_{pp}: Y \subseteq \bar{r}(M)$) gdw $\bar{r}(M)=M_{pp}$
(2) Beweise: Wenn "für alle $Y \subseteq M_{pp}: Y \subseteq \bar{r}(M)$" gilt, so gilt auch die empirische Behauptung.

(ÜII-24): Wir definieren: T' ist eine Spezialisierung von $T=\langle M_{p},M,M_{pp},I\rangle$ gdw $T'=\langle M'_{p},M',M'_{pp},I'\rangle$ und 1) $M'_{p}=M_{p}$, 2) $M'_{pp}=M_{pp}$, 3) $M' \subseteq M$ und 4) $I' \subseteq I$.
(1) Definiere: "T' ist eine Spezialisierung von T''" für beliebige Spezialisierungen von T im Sinne der obigen Definition.
(2) Ist σ die in (1) definierte Relation ($\sigma \subseteq N \times N$, mit N als Menge aller Spezialisierungen von T), so gilt: $\langle N,\sigma\rangle$ ist eine

Poset (= partially ordered set), d.h. es gelten für alle a,b,c $\in N$:

(i) $a \sigma a$

(ii) wenn $a \sigma b$ und $b \sigma c$, dann $a \sigma c$

(iii) wenn $a \sigma b$ und $b \sigma a$, dann $a=b$.

(3) Gilt für σ aus (2) auch: für alle $a,b \in N$ ($a \sigma b$ oder $b \sigma a$)?

(4) Zeige: (Für $X \subseteq M_p$ gilt (nicht: $\bar{r}(X) \subseteq \bar{r}(M)$)) impliziert $\bar{r}(M) \subseteq M_{pp}$.

(ÜII-25): (1) Formuliere die im Text beschriebene Querverbindung als Teilmenge Q von Pot(M_p). (Q enthält genau die "Kombinationen", die die Querverbindung erfüllen.)

(2) Für $K=\langle M_p,M,M_{pp},Q\rangle$ sei $\bar{r}_K$:Pot(M_p) $\rightarrow$ Pot(M_{pp}) definiert durch $\bar{r}_K(X):=\{r(x)/x \in X\}$ und $A(K):=\{X \subseteq M_{pp}$/es gibt $Y \subseteq M_p$: $\bar{r}_K(Y)=X$ und $Y \subseteq M$ und $Y \in Q\}$. Wir sagen, K habe keinen empirischen Gehalt, wenn gilt $A(K)=$Pot(M_{pp}). Offenes Problem: Hat K im Fall von ÖKO keinen empirischen Gehalt?

Kapitel III Klassische Mechanik

Die klassische Mechanik ist ein Teilgebiet der Physik und beschäftigt sich mit Bewegungen von Teilchen (Körpern,Partikeln,Massenpunkten,Dingen,Objekten).Diese werden für beliebige Geschwindigkeiten mit Hilfe von Massen und Kräften erklärt.Man kann die Mechanik in zwei Teilgebiete zerlegen.Es gibt als "Unterbau" eine Theorie,deren Ziel es ist,Bewegungen, Orte,Zeiten,Geschwindigkeiten und Beschleunigungen zu beschreiben: die Kinematik.Auf diesem Unterbau wird eine zweite Theorie errichtet,welche die von der Kinematik beschriebenen Bewegungen als durch Kräfte verursacht erklärt und nach verschiedenen Kraftarten systematisiert: die Dynamik (oder Mechanik im engeren Sinn). Wir werden auch hier einen Aufbau in zwei Schritten vornehmen und wenden uns zunächst der Kinematik zu.Die klassische Kinematik -"klassisch",weil Bewegungen mit beliebig hohen Geschwindigkeiten zugelassen sind-entsteht durch Koppelung einer Theorie des Raumes oder der räumlichen Verhältnisse mit einer Theorie der Zeit oder der zeitlichen Verhältnisse.Die klassische Theorie des Raumes ist die Geometrie.Die klassische Zeittheorie hat keinen eigenen Namen,weil sie von ihrer formalen Struktur her zu einfach und deshalb relativ uninteressant ist.

Wir werden von jetzt an nicht mehr nach der Methode vorgehen,nach der die jeweilige Struktur aus konkreten Beispielen abstrahiert wird.Vielmehr gehen wir umgekehrt vor: erst werden die relevanten Strukturen beschrieben und danach geben wir Beispiele von Realisierungen solcher Strukturen an.Diese Methode ist wesentlich effizienter,denn erstens braucht man nicht so viele Beispiele zu beschreiben und zweitens erweist sich die Durchführung der umgekehrten,in Kap.I und Kap.II verfolgten Methode im Fall physikalischer Theorien als mit einer zusätzlichen Schwierigkeit behaftet.Physikalische Theorien sind nämlich stets "ideale" Theorien über "ideale" Objekte.Bei Abstraktion solcher Theorien aus konkreten Beispielen muß man sich zusätzlich klar machen,wie der Übergang von realen zu idealen Objekten zu verstehen ist.

In den früheren Kapiteln hatten wir schon zwei Arten von Strukturen unterschieden: Modelle und potentielle Modelle. Potentielle Modelle sind Strukturen,die durch Zusammenfassung der verschiedenen für die Theorie relevanten Begriffe entstehen. Sie beinhalten nur,welche Begriffe verwendet werden und wie jeder Begriff für sich formal charakterisiert werden kann. Potentielle Modelle liefern den begrifflichen Rahmen zur Erfassung konkreter Situationen.Modelle dagegen sind Strukturen, in denen auch inhaltliche Axiome gelten,das heißt Gesetze,in denen die verschiedenen Begriffe miteinander in Verbindung gebracht sind.Wenn man in einem Modell die inhaltlichen Axiome einfach "vergißt",so bilden die Komponenten dieses Modells ein potentielles Modell.Hat man umgekehrt ein potentielles Modell, dessen Komponenten darüberhinaus die inhaltlichen Axiome erfüllen,so ist dieses potentielle Modell bereits ein Modell.

Wir verwenden die Abkürzungen GEO für Geometrie,ZEIT für Zeittheorie,KIN für Kinematik und MECH für Mechanik.Die zu jeder Theorie gehörenden Klassen von Modellen,potentiellen und partiellen Modellen bezeichnen wir mit $M, M_p, M_{pp}, M(GEO)$, $M_p(GEO), M_{pp}(GEO), M(ZEIT)$ usw.

GEOMETRIE

Ein potentielles Modell der Geometrie: genauer der euklidischen Geometrie,hat die Form

$$\langle R; \underline{zw}, \equiv \rangle ,$$

wobei R eine Menge von Raumpunkten ist und $\underline{zw}$ bzw. $\equiv$ die Relationen "zwischen" bzw. "kongruent".Raumpunkte stellen wir uns dabei am besten als Marken oder Markierungen oder Kreuze auf Gegenständen vor.Auf einer Tischplatte z.B. kann man verschiedene Stellen markieren und über sie,indem man sie als

Raumpunkte auffaßt,Sätze der Geometrie aufstellen.

Die "Zwischen"-Relation zw dient dazu,Aussagen zu machen, ob sich ein Raumpunkt zwischen zwei anderen befindet oder nicht.Es handelt sich also um eine dreistellige Relation für Raumpunkte.Sind drei Raumpunkte a,b,c gegeben,so liegt b entweder zwischen a und c oder nicht.Im ersten Fall trifft die Relation zw auf die drei Punkte zu,wir schreiben

$$\underline{zw}(a,b,c),$$

im zweiten Fall trifft sie nicht zu und wir schreiben

$$\neg\underline{zw}(a,b,c).$$

Indem wir für eine gegebene Menge von Raumpunkten R alle Tripel von Punkten $\langle a,b,c\rangle$ daraufhin untersuchen,ob sie die Zwischenrelation erfüllen oder nicht,erhalten wir die Menge A derjenigen Tripel,die die Relation erfüllen und die Menge B derjenigen Tripel,die die Relation nicht erfüllen.Die erste Menge kann man mit der Zwischenrelation identifizieren.

Zur Rechtfertigung dieser Identifikation machen wir uns zwei Beziehungen klar.Erstens kann man,wenn die Bedeutung von "zwischen" bekannt ist,die Menge A genau bestimmen.Man braucht dazu nur alle Tripel von Raumpunkten (wir nehmen an,daß nur endlich viele Raumpunkte zur Diskussion stehen) zu untersuchen und festzustellen,ob für das Tripel $\langle a,b,c\rangle$ b zwischen a und c liegt.Falls ja,gehört $\langle a,b,c\rangle$ zu A,falls nein,zu B.Zweitens kennt man die Bedeutung von "zwischen",wenn man A kennt.Denn die Bedeutung von "zwischen" besteht im vorliegenden Kontext unter anderem darin,zu wissen,wann ein Punkt zwischen zwei anderen liegt.Dieses Wissen aber hat man,wenn man A genau kennt.Man weiß dann nämlich,daß ein Punkt b zwischen a und c genau dann liegt,wenn $\langle a,b,c\rangle \in A$ (ÜIII-1).

Durch diese Identifikation wird also die Zwischenrelation zu einer Menge von Tripeln von Raumpunkten,d.h.

$$\underline{zw} \subseteq R \times R \times R \quad \text{,oder einfach } \underline{zw} \subseteq R^3.$$

Genauso funktioniert die Kongruenzrelation $\equiv$ .Sie beinhaltet unser Wissen davon,daß Punktepaare kongruent sind zu anderen Punktepaaren.Dabei stellt man sich ein Punktepaar $\langle a,b\rangle$ so vor,daß a und b Endpunkte einer Strecke sind.Statt von der

Kongruenz von Punktepaaren zu reden,könnte man dann auch die üblichere Sprechweise von der Kongruenz zweier Strecken übernehmen,nämlich der Strecken mit den Punkten des Paares als Endpunkten.Kongruenz ist also eine vierstellige Relation zwischen Punkten oder eine zweistellige Relation zwischen Punktepaaren.Wir schreiben

$$ab \equiv a'b',$$

zu lesen als "die vier Punkte a,b,a',b' erfüllen die Kongruenzrelation" oder "das Punktepaar $\langle a,b\rangle$ ist kongruent zum Punktepaar $\langle a',b'\rangle$" oder "die Strecke mit Endpunkten a und b ist kongruent zur Strecke mit Endpunkten a' und b' ".Wieder identifizieren wir die Kongruenzrelation $\equiv$ mit der Menge aller Quadrupel von Punkten $\langle a,b,a',b'\rangle$,für die Kongruenz vorliegt.(ÜIII-2).Es ist dann

$$\equiv\ \subseteq R \times R \times R \times R \quad \text{,oder einfach} \quad \equiv\ \subseteq R^4.$$

DIII-1 x ist ein <u>potentielles Modell der Geometrie</u>

($x \in M_p(GEO)$) gdw es R,<u>zw</u> und $\equiv$ gibt,sodaß

1) $x=\langle R;\underline{zw},\equiv\rangle$
2) R ist eine nicht-leere Menge (von Raumpunkten)
3) $\underline{zw} \subseteq R^3$ (Zwischenrelation)
4) $\equiv\ \subseteq R^4$ (Kongruenzrelation)

Damit sind die geometrischen Grundbegriffe bereitgestellt. Die inhaltlichen Axiome sind die bekannten Axiome der Geometrie.Wir wählen eine auf Tarski zurückgehende,weniger bekannte Formulierung,die relativ einfach und doch einigermaßen durchsichtig ist (siehe [Tarski,1959]).

DIII-2 x ist ein <u>Modell der Geometrie</u> ($x \in M(GEO)$) gdw es R,<u>zw</u> und $\equiv$ gibt,sodaß

1) $x=\langle R;\underline{zw},\equiv\rangle$
2) $x \in M_p(GEO)$
3) für alle $a,b,c,a',b',a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3 \in R$:

A1) wenn <u>zw</u>(a,b,a),dann a=b
A2) wenn <u>zw</u>(a,b,c) und <u>zw</u>(b,a',c),dann <u>zw</u>(a,b,a')
A3) wenn $a \neq b$ und <u>zw</u>(a,b,c) und <u>zw</u>(a,b,a'),dann <u>zw</u>(a,c,a')
A4) $ab \equiv ba$
A5) wenn $ab \equiv cc$,dann a=b

A6) wenn $ab \equiv a'b'$ und $ab \equiv a_1b_1$, dann $a'b' \equiv a_1b_1$

A7) wenn zw(a,b',b) und zw(c,b,a'), dann gibt es $e \in R$, sodaß zw(a,e,c) und zw(e,b',a')

A8) wenn zw(a,b,c) und zw(a',b,b') und $a \neq b$, dann gibt es e und $e' \in R$, sodaß zw(a,b',e) und zw(a,a',e') und zw(e,c,e')

A9) wenn $aa_1 \equiv bb_1$ und $a_1a_2 \equiv b_1b_2$ und $aa_3 \equiv bb_3$ und $a_1a_3 \equiv b_1b_3$ und zw(a,a_1,a_2) und zw(b,b_1,b_2) und $a \neq a_1$, dann $a_2a_3 \equiv b_2b_3$

A10) es gibt $e \in R$: zw(a,b,e) und $be \equiv a'b'$

A11) es gibt $e_1,\dots,e_4 \in R$, sodaß $e_1,\dots,e_4$ nicht in einer Ebene liegen (ÜIII-3)

A12) wenn $aa_1 \equiv aa_2$ und $aa_1 \equiv aa_3$ und $aa_2 \equiv aa_3$ und $ba_1 \equiv ba_2$ und $ba_2 \equiv ba_3$ und $ba_1 \equiv ba_3$ und $ca_1 \equiv ca_2$ und $ca_2 \equiv ca_3$ und $ca_1 \equiv ca_3$ und $a_1 \neq a_2$ und $a_2 \neq a_3$ und $a_3 \neq a_1$, dann zw(a,b,c) oder zw(b,a,c) oder zw(a,c,b)

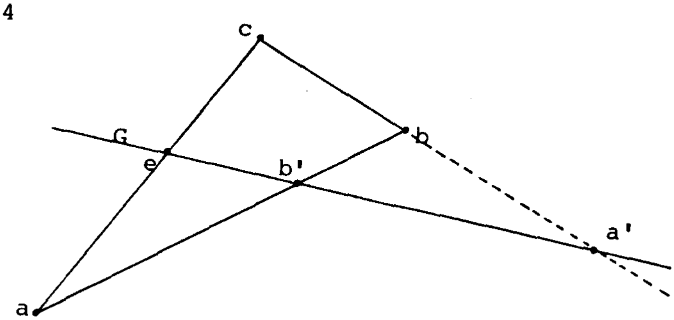
A13) für alle $X,Y \subseteq R$: (wenn es $e \in R$ gibt, sodaß für alle a,b $\in R$: wenn $a \in X$ und $b \in Y$, dann zw(e,a,b)), dann gibt es $e' \in R$, sodaß für alle $a',b' \in R$: wenn $a' \in X$ und $b' \in Y$, dann zw(a',e',b')

Mit den einzelnen Axiomen muß man sich natürlich eine Weile befassen, bevor man sie anschaulich versteht. A1) besagt: wenn b zwischen a und a liegt, dann ist a mit b identisch. Zwischen einem Punkt a "und ihm selbst" kann eben nichts liegen. Man beachte aber, daß die Zwischenrelation auch für solch ausgeartete Fälle gedacht ist. Aus zw(a,b,c) soll nicht folgen: $a \neq b \neq c \neq a$. Die Zwischenrelation ist also so zu verstehen, daß zw(a,b,c) entweder im üblichen Sinn auf drei verschiedene Punkte zutrifft, oder daß zwei oder gar alle drei der Punkte identisch sind. Die intuitiv unschönen Fälle bewirken eine große formale Vereinfachung bei den Axiomen.

Ähnlich ist auch die Kongruenzrelation zu verstehen. A5) z.B. sagt, daß wenn $ab \equiv cc$, dann $a=b$. Die Kongruenzrelation kann also auch auf Punktepaare zutreffen, die Strecken der Länge Null entsprechen (nämlich <a,a>).

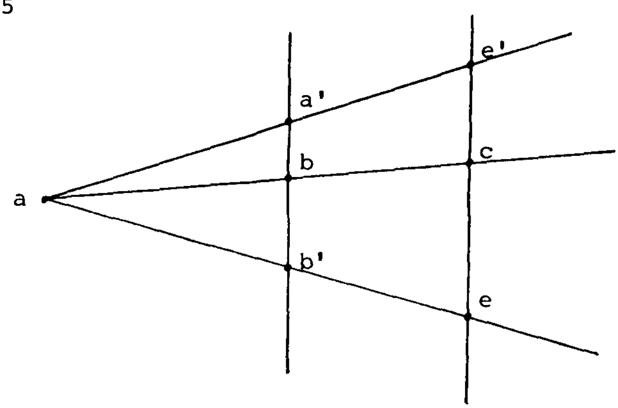
A7) ist das sogenannte Pasch-Axiom (nach dem Mathematiker Pasch benannt). Man hat (siehe Figur 14) ein Dreieck mit Eckpunkten a,b,c und einen Punkt a' außerhalb des Dreiecks.Legt man durch a' eine Gerade G so,daß sie die Seite $\overline{ab}$ des Dreiecks -etwa im Punkt b'- schneidet,so sagt das Axiom,daß es auch einen Schnittpunkt e dieser Geraden mit der anderen Seite $\overline{ac}$ des Dreiecks gibt.Dies gilt für beliebiges G.

Fig.14



A8) ist eine Version des euklidischen Parallelenaxioms (siehe Figur 15).

Fig.15

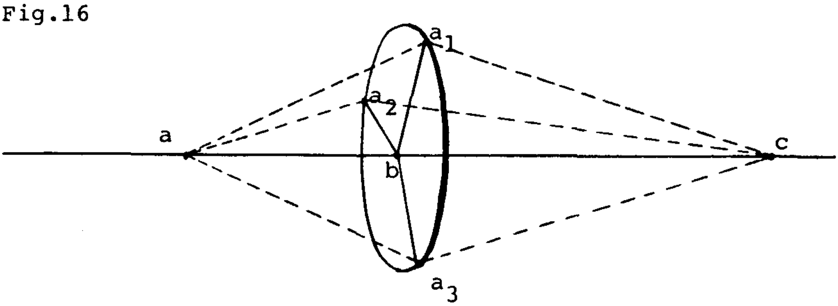


Gegeben ist ein Dreieck mit Eckpunkten a,b',a' und ein Punkt b auf der Seite $\overline{a'b'}$.Wir verlängern die Gerade von a nach b über b hinaus und wählen irgendeinen Punkt c außerhalb des

Dreiecks.Das Axiom besagt dann,daß es auf den Verlängerungen der Strecken $\overline{aa'}$ über a' hinaus und $\overline{ab'}$ über b' hinaus Punkte e' und e gibt,sodaß e,c und e' auf einer Geraden liegen,die parallel zur Seite $\overline{b'a'}$ des Dreiecks ist.Daß e,c und e' auf einer Geraden liegen,wird durch zw(e,c,e') ausgedrückt.

A11) besagt,daß der Raum mehr als zweidimensional ist.A12) fordert,daß,wenn für jeden der Punkte a,b,c gilt,daß er gleich weit weg von allen drei Punkten a_1,a_2,a_3 ist,a,b,c auf einer Geraden liegen müssen (siehe Figur 16).

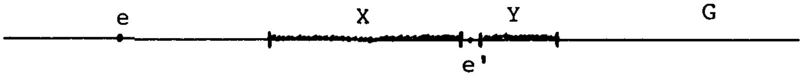
Fig.16



Ein Raum,in dem A12) gilt,hat weniger als vier Dimensionen, denn daß drei Punkte a,b,c die Kongruenzbedingung in Figur 16) erfüllen,impliziert in vier und mehrdimensionalen Räumen nicht,daß a,b,c auf einer Geraden liegen.Allerdings kann man sich dies anschaulich schwer vorstellen (ÜIII-4). A11) und A12) zusammen legen also die Dimension auf die Zahl 3 fest.

A13) ist das sogenannte Stetigkeitsaxiom (siehe Figur 17).

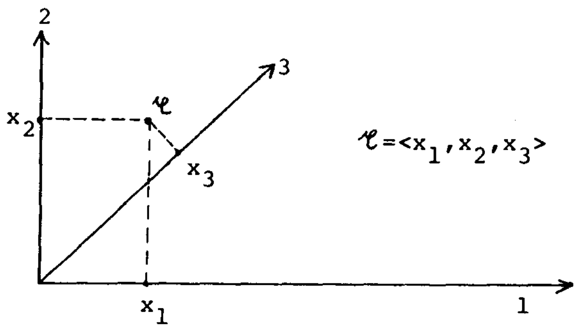
Fig.17



Die Prämisse "es gibt $e \in R$,sodaß für alle a,b: wenn $a \in X$ und $b \in Y$,dann zw(e,a,b)" ist nur erfüllt,wenn die Punktmengen X und Y auf einer Geraden liegen.In dieser Situation wird dann die Existenz eines Punktes e' "zwischen" den Punktmengen X und Y auf der Geraden gefordert.Sind z.B. X und Y die Zahlenmengen $X=\{\alpha \in \mathbb{Q} \ / \alpha^2 < 2\}$,$Y=\{\alpha \in \mathbb{Q} \ / \alpha^2 > 2\}$,so fordert das Axiom die Existenz einer Zahl,die auf der Zahlengeraden zwischen X und Y liegt.Es ist dies gerade die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ (ÜIII-5).

Ein Modell der Geometrie müssen wir uns im Prinzip vorstellen als eine sich ins unendlich Große erstreckende und unendlich feine dreidimensionale Mannigfaltigkeit von Raumpunkten,wobei festliegt,wann ein Raumpunkt zwischen zwei anderen liegt und wann vier Raumpunkte kongruent sind.Ein aus der Mathematik bekanntes Beispiel,ein Modell ist der dreidimensionale Zahlenraum $\mathbb{R}^3$.Man hat drei Zahlengeraden rechtwinklig zueinander angeordnet.Sie bilden ein Koordinatensystem,in dem jeder andere Raumpunkt durch seine drei kartesischen Koordinaten eindeutig festgelegt ist (siehe Figur 18). (ÜIII-6).

Fig.18



Ein realistischeres Modell kann man sich wie folgt vorstellen. In einem rechtwinkligen Zimmer bilden drei aneinanderstoßende Wandkanten ein Koordinatensystem.Der mit diesem Koordinatensystem erfaßt Raum bildet ein "Teilstück" eines unendlichen Modells der Geometrie.Innerhalb des Zimmers können wir zumindest in Gedanken die Raumpunkte immer feiner bestimmen und uns so eine kontinuierlich dichte Menge von Raumpunkten vorstellen.Natürlich ist so ein Zimmer kein "richtiges" Modell, weil nicht alle Axiome erfüllt sind. Aber man kann es näherungsweise als Modell betrachten, weil die Axiome, die für das Zimmer nicht gelten, rein idealisierenden Charakter haben. Sie fordern, daß sich der Raum immer weiter ins Unendliche erstreckt (ÜIII-7). In dem Modell des Zimmers ist auch klar, wie in der Realität die beiden Relationen $\underline{zw}$ und $\equiv$ ermittelt werden. Ob $\underline{zw}$ für drei bestimmte Punkte gilt, kann man z.B. durch Anlegen einer geraden Meßlatte, eines Lineals, ermitteln. Kongruenz $ab \equiv a'b'$ läßt sich feststellen, indem man z.B. ein gespanntes Seil von a zu b spannt und markiert und dann versucht, die Markierungen bei gespanntem Seil auch mit a' und b' zur Deckung zu bringen. Es gibt noch viele andere Methoden zur Ermittlung oder Bestimmung von $\underline{zw}$ und $\equiv$.

In der Mechanik kommen wir mit der geschilderten Vorstellung eines geschlossenen Zimmers gut zurecht. Die meisten mechanischen Systeme werden bei Laborexperimenten in Zimmern aufgebaut, sodaß das Zimmer (oder etwas weniger naiv: der Aufbau, die Versuchsanordnung) schon ein Koordinatensystem mitliefert. Bei größeren Anwendungen, etwa dem Planetensystem, muß man sich um das System herum einen relativ zur Sonne ruhenden "Kasten" vorstellen.

ZEITTHEORIE

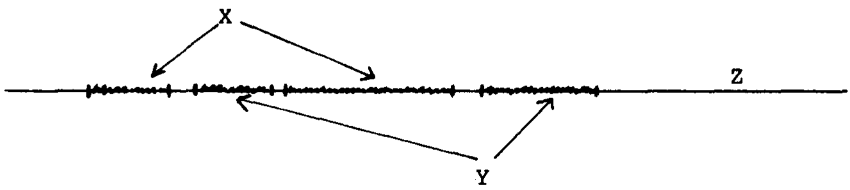
Die potentiellen Modelle der Zeittheorie bestehen aus einer Menge Z von Zeitpunkten und, im einfachsten Fall, aus einer Ordnungsrelation $\lessdot$ für Zeitpunkte, die ausdrücken soll "ist später als". $\lessdot$ ist also eine zweistellige Relation und wir schreiben $t \lessdot t'$ (zu lesen als: "t liegt zeitlich vor t' "). Identifiziert man die Relation $\lessdot$ mit der Menge aller Paare $\langle t,t'\rangle$, für die gilt, daß t (zeitlich) vor t' liegt, so ist $\lessdot \subseteq Z \times Z$ (ÜIII-8).

Für die $\lessdot$-Relation gelten einige einleuchtende Axiome: die Axiome der linearen Ordnung. ($\underline{\lessdot}$ ist eine Ordnung auf Z im Sinn von (ÜI-10)). Sie besagen, daß kein Zeitpunkt "vor sich selbst" liegt (nicht: $t \lessdot t$), daß für je zwei Zeitpunkte t und t' einer von beiden früher und einer später ist (wenn $t \neq t'$, dann $t \lessdot t'$ oder $t' \lessdot t$) und daß, wenn t' später als t und t'' später als t' ist,so auch t'' später als t ist (wenn $t \lessdot t'$ und $t' \lessdot t''$, dann $t \lessdot t''$).Weiter sollen die Zeitpunkte "dicht" liegen.Das heißt: zu je zwei verschiedenen Zeitpunkten gibt es einen weiteren,der zeitlich zwischen ihnen liegt (wenn $t \lessdot t'$,dann gibt es t'',sodaß: $t \lessdot t''$ und $t'' \lessdot t'$).Schließlich kann man noch ein Stetigkeitsaxiom wie in der Geometrie formulieren.Für je zwei disjunkte Mengen von Zeitpunkten gibt es einen Zeitpunkt,der zeitlich zwischen den Zeitpunkten beider Mengen liegt.

> Für alle $X,Y \subseteq Z$: (wenn $X \cap Y=\emptyset$ und für alle t,t': wenn $t \in X$ und $t' \in Y$,dann $t \lessdot t'$),dann gibt es $t_o \in Z$,sodaß für alle t,t': wenn $t \in X$ und $t' \in Y$,dann $t \lessdot t_o$ und $t_o \lessdot t'$.

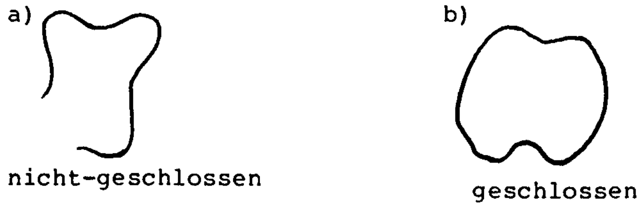
Die Prämisse (der erste "Wenn"-Satz) ist diesmal nur nötig,um eine Verschachtelung der Mengen X und Y ineinander auszuschließen,wie sie in Figur 19) dargestellt ist.(ÜIII-9).

Fig.19



Eine Struktur,die die genannten Axiome erfüllt,bildet ein rein topologisches Modell der Zeit."Topologisch" heißt dabei,daß nur die Aufeinanderfolge der Zeitpunkte geregelt wird.Sie folgen aufeinander so,wie die Zahlen auf der Zahlengeraden einander bezüglich der "Größer"-Relation folgen.Dagegen enthalten die Axiome keine Möglichkeit,über den zeitlichen Abstand von zwei Zeitpunkten zu reden,oder zwei Zeitpunkte oder Zeitspannen zu "addieren".Diese Möglichkeiten hat man auf der Zahlengeraden.Bestimmte Eigenschaften des Abstands von Zahlen und der Addition von Zahlen bewirken,daß unsere Vorstellung der Zahlengeraden tatsächlich eine Gerade sein muß.Die bisher genannten rein topologischen Axiome dagegen kann man sich auf einer krummen Linie realisiert denken,solange sie nicht geschlossen ist (siehe Figur 20).

Fig.20



Eine Zeittheorie der skizzierten Art (d.h. deren Modelle aus einer Menge Z von Zeitpunkten und einer Ordnungsrelation zwischen Zeitpunkten bestehen,für welche die genannten Axiome gelten) hätte den Vorteil,explizit über Zeitpunkte zu reden. Sie hat aber drei wichtige Nachteile.Erstens ist sie zu schwach.In der Mechanik braucht man Abstände von Zeitpunkten und man muß Zeitspannen addieren können.Natürlich könnte man eine Abstandsfunktion und die Addition als weitere Grundbegriffe hinzunehmen und auch für diese geeignete Axiome aufschreiben.Man erhält dann aber fast die gleichen Axiome,wie sie für die reellen Zahlen gelten.Zweitens ist es ziemlich unklar,was denn Zeitpunkte eigentlich *sind*! (Der Leser versuche sich klar zu machen,was ein Zeitpunkt ist.) Und drittens ist eine solche Theorie nur mit Komplikationen in die Mechanik einzubauen.Aus diesen Gründen werden wir ein mehr mathematisches Modell der Zeit benutzen.Es hat zwar den Nachteil,daß im Modell Zeitpunkte mit reellen Zahlen identifiziert werden,aber den Vorteil,den ganzen Aufbau der Mechanik zu vereinfachen.Es sei bemerkt,daß wir die Zeitpunkte *nur* aus Einfachheitsgründen mit reellen Zahlen gleichsetzen.Es ist vollkommen klar,wie man mit mehr Aufwand diese Gleichsetzung vermeiden und über Zeitpunkte als Grundobjekte reden kann.Dies wird z.B. in [Balzer,1982a] ausgeführt.

Unter der mathematisierten Betrachtungsweise ist ein Modell der Zeittheorie eine Struktur $\langle \mathbb{R};<\cdot \rangle$,bestehend aus den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und einer Ordnungsrelation $<\cdot$.Da man für reelle Zahlen schon eine Kleinerrelation hat,können wir für unser zeitliches $<\cdot$ auch diese mathematische Relation benutzen.

DIII-3 $x \in M(ZEIT)$ gdw es Z und $<\cdot$ gibt,sodaß

1) $x = \langle Z; <\cdot \rangle$
2) Z ist die Menge der reellen Zahlen
3) $<\cdot$ ist die Kleinerrelation für reelle Zahlen

Wir schreiben im Zusammenhang mit der Zeittheorie Z und $<\cdot$ anstelle von $\mathbb{R}$ und des normalen Zeichens $<$,um anzudeuten,daß wir hier ja eigentlich von Zeitpunkten und der zeitlichen Relation "ist später als" reden wollen und nur aus Einfachheitsgründen mathematische Objekte und Strukturen benutzen.

Ein Modell gemäß DIII-3) hat alle schönen Eigenschaften,die man sich nur wünschen kann.Erstens sind,wie man aus der Mathematik weiß,alle oben genannten topologischen Axiome für $<\cdot$ erfüllt.Darüberhinaus ist für reelle Zahlen eine Abstandsfunktion definierbar.Man setzt

$$d(\alpha,\beta) := |\alpha-\beta| ,$$

wobei $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ und $|\,|$ die Betragsfunktion ist.Weiter kann man reelle Zahlen addieren und man kann für Funktionen,die von $\mathbb{R}$ in irgendwelche Zahlenräume gehen,Differenzierbarkeit definieren (ÜIII-10).

Als reales Modell können wir uns z.B. eine Uhr vorstellen, deren Zeiger genau eine Umdrehung auf dem Ziffernblatt macht. Die verschiedenen Zeigerstellungen entsprechen den Zeitpunkten $t \in Z$.$t <\cdot t'$ bedeutet,daß die Zeigerstellung t' aus der Zeigerstellung t durch Drehung des Zeigers im Uhrzeigersinn hervorgeht.Wenn die Uhr ein Ziffernblatt hat,auf dem die Zahlen von 1 bis 12 mit Unterteilungen markiert sind,so entspricht die im Zeitmodell definierbare Abstandsfunktion den auf dem Ziffernblatt ablesbaren Zahlendifferenzen.Der Abstand der Zahlen 3 und 5 z.B. ist 2 und bedeutet auf dem Ziffernblatt eine Zeitspanne von 2 Stunden.Der Abstand von Zeitpunkten im Modell ist also nichts anderes als das,was man unter "Zeitspanne" oder "Zeitdauer" versteht.Zeitspannen kann man addieren.Die Zeitspanne von 3 bis 5 Uhr (2 Stunden) kann man zur Zeitspanne von 7 bis 10 Uhr (3 Stunden) zu einer Gesamtzeitspanne von 5 Stunden hinzunehmen.So läßt sich die Addition im Modell interpretieren.Zwei Zahlen werden als Längen von Zeitspannen aufgefaßt (als Ergebnis der Abstandsermittlung von Zeitpunkten) und ihre mathematische Summe ist die Länge der beiden Zeitspannen zusammen.

Auch die Möglichkeit,differenzierbare Funktionen auf Z zu betrachten,läßt sich am Beispiel der Uhr real nachvollziehen. Wenn man z.B. die Bewegung eines Pendels in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt,so muß man bei Schwingung des Pendels eine Uhr mitlaufen lassen.Die Beschreibung der Bewegung erfolgt durch Angabe einer Funktion,die jedem auf der Uhr ablesbaren Zeitpunkt einen Ort des Pendels (in einem fest gewählten Koordinatensystem) zuordnet.Bei Beschreibung von Bewegungen setzt die Mechanik voraus,daß Bewegungen stetig differenzierbar in Abhängigkeit von der Zeit erfolgen,d.h. daß sie nicht ruckartig oder sprunghaft verlaufen.Dieses Prinzip schlägt sich in der Theorie in der Benutzung stetig differenzierbarer Funktionen nieder.Solche Funktionen kann man nur auf reellen Zahlen oder ähnlichen mathematischen Strukturen definieren.

Das betrachtete Modell der Uhr ist,genau wie das Zimmer in der Geometrie,kein richtiges Modell.Ein richtiges Modell müßte unendlich weit in Vergangenheit und Zukunft hineinreichen.Die Uhr bildet aber ein realistisches Teilstück eines solchen Modells,also ein näherungsweises Modell,denn die Forderungen des Modells,die bei der Uhr nicht erfüllt sind,haben wieder rein idealisierenden Charakter.

KLASSISCHE RAUM-ZEIT

Geometrie und Raum-Zeit-Theorie müssen gekoppelt werden,um Bewegungen erfassen zu können.Denn bei Bewegungen ändern sich erstens die räumlichen Verhältnisse und zweitens ist bei dieser Änderung die Geschwindigkeit relevant.Ob ein Körper von Punkt a nach b sich langsam oder schnell bewegt,ist vielleicht nicht wichtig,wenn man nur diesen Körper betrachtet.Wenn aber daneben noch andere Bewegungen,die langsamer oder schneller vor sich gehen,beobachtet werden,dann macht es relativ zu diesen anderen Bewegungen einen Unterschied,ob sich der betrachtete Körper langsam oder schnell von a nach b bewegt.

Nun kann man aber Raum und Zeit in der Beschreibung von Bewegungen nicht einfach nebeneinanderstellen,denn man will ja gerade eine Verbindung bekommen,die sich in Aussagen der Art "der Körper K ist zum Zeitpunkt t am Ort a" niederschlägt.Wir brauchen also einen neuen Grundbegriff,in dem Raum- und Zeitpunkte zusammengefaßt sind.Wir wählen hierfür eine dreistellige Abstandsfunktion d (ÜIII-11),die je einem Zeitpunkt t und zwei Raumpunkten a und b eine reelle Zahl d(t,a,b) zuordnet,nämlich den Abstand der Punkte a und b zur Zeit t. Formal ist dann

$$d: Z \times R \times R \to \mathbb{R}_0^+.$$

Es ist zwar nicht offensichtlich,aber doch richtig,daß sich durch eine solche Abstandsfunktion die geometrischen Grundbegriffe $\underline{zw}$ und $\equiv$ definieren lassen.Das funktioniert folgendermaßen.Man kann bei der Funktion d einen bestimmten Zeitpunkt t als Argument einsetzen und festhalten,sodaß aus d eine Funktion

$$d_t: R \times R \to \mathbb{R}_0^+$$

entsteht (siehe DIII-4a) unten).Daß Punkt b zwischen Punkten a und c liegt,kann man mittels d_t ausdrücken durch die Formel

$$d_t(a,b)+d_t(b,c)=d_t(a,c).$$

Wenn nämlich d_t eine Abstandsfunktion ist,so gilt

$$d_t(a,c) \leq d_t(a,b)+d_t(b,c)$$

(ÜIII-12) und die Gleichheit gilt genau dann,wenn b zwischen a und c liegt.Ebenso läßt sich die Kongruenz $ab \equiv a'b'$ ausdrücken durch

$$d_t(a,b)=d_t(a',b').$$

Wir halten diese Definitionen ausdrücklich fest,da wir sie noch brauchen.

<u>DIII-4</u> Es seien R und Z Mengen, $d: Z \times R \times R \to \mathbb{R}_0^+$ und $t \in Z$.

a) $d_t: R \times R \to \mathbb{R}_0^+$ wird definiert durch

$$d_t(a,b) := d(t,a,b)$$

b) $\underline{zw}_{d,t} \subseteq R^3$ wird definiert durch

$\underline{zw}_{d,t}(a,b,c)$ gdw $d_t(a,b)+d_t(b,c)=d_t(a,c)$

c) $\equiv_{d,t} \subseteq R^4$ wird definiert durch

$ab \equiv_{d,t} a'b'$ gdw $d_t(a,b)=d_t(a',b')$

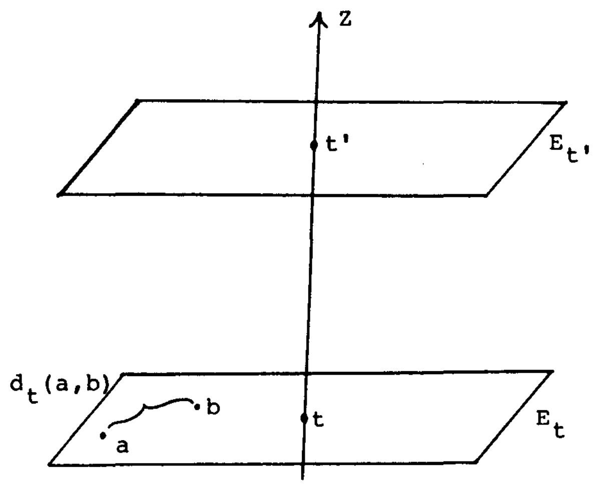
Bei Wahl einer dreistelligen zeitabhängigen Abstandsfunktion als Grundbegriff können wir also die geometrischen Grundbegriffe zw und $\equiv$ definieren.Die zeitliche Ordnung $\lessdot$ ist dagegen in d noch nicht enthalten.Sie muß weiterhin explizit mitgeführt werden.

DIII-5 x ist ein potentielles Modell der klassischen Raum-Zeit-Theorie gdw es $R,Z,\lessdot$ und d gibt,sodaß

1) $x=\langle R,Z;\lessdot,d\rangle$
2) R ist eine nicht-leere Menge (von Raumpunkten)
3) Z ist die Menge der reellen Zahlen (Zeitpunkte)
4) $\lessdot \subseteq Z \times Z$ (Später-Relation)
5) $d: Z \times R \times R \to \mathbb{R}_0^+$ (zeitabhängige Abstandsfunktion)

Eine solche Struktur beschreibt also Mengen von Raum- und Zeitpunkten,wobei für die Zeitpunkte eine zeitliche Ordnung festgelegt ist und räumliche Abstände in Abhängigkeit von der Zeit vorliegen.Anschaulich kann man sich eine solche Struktur folgendermaßen vorstellen (siehe Figur 21).

Fig.21



Die Zeitpunkte Z sind durch die vertikale Achse dargestellt. Zu jedem Zeitpunkt $t \in Z$ gibt es eine Ebene E_t, sodaß Z senkrecht auf E_t steht und E_t gerade im Punkt t durchsticht. Diese Ebene E_t ist unser Bild des Raumes "zum Zeitpunkt t". Da wir durch perspektivische Zeichnung nur drei Dimensionen darstellen können, müssen wir den dreidimensionalen Raum zu einem zweidimensionalen Raum machen. Der Raum wird dadurch zu einer Ebene. Wir verlieren aber durch die Herabsetzung der Dimension keine wesentliche Information. Die Punkte der Ebene E_t sind die Raumpunkte. Zwischen ihnen sind durch die Abstandsfunktion d_t die Abstände festgelegt. Zu einem späteren Zeitpunkt, etwa t', haben wir wieder eine solche Ebene $E_{t'}$, die nunmehr den Raum zum Zeitpunkt t' darstellt. Zu $E_{t'}$ gehört wieder eine Abstandsfunktion $d_{t'}$, welche die verschiedenen Abstände zwischen den Raumpunkten in dieser Ebene angibt. Genau genommen müssen wir unendlich viele solcher Ebenen übereinander schichten, es genügt aber, sich jeweils nur einige wenige hinzuzeichnen.

Durch Axiome wird nun gefordert, daß die vertikale Zeitachse ein Modell der Zeittheorie sein soll und daß jede zu einem Zeitpunkt t gehörende räumliche Ebene in Figur 21) die Axiome der Geometrie erfüllt. In der Zeichnung führt dies zu einer richtigen Ebene, in der Theorie zu einem Modell des dreidimensionalen Raumes, welches zum Zeitpunkt t gehört.

<u>DIII-6</u> x ist ein <u>Modell der klassischen Raum-Zeit-Theorie</u> gdw es $R, Z, \prec$ und d gibt, sodaß

1) $x = \langle R, Z; \prec, d \rangle$
2) x ist ein potentielles Modell der klassischen Raum-Zeit-Theorie
3) $\langle Z; \prec \rangle$ ist ein Modell der Zeittheorie
4) für alle $t \in Z$: $\langle R; \underline{zw}_{d,t}, \equiv_{d,t} \rangle$ ist ein Modell der Geometrie
5) für alle $t, t' \in Z$ gibt es $\alpha \in \mathbb{R}^+$, sodaß $d_t = \alpha d_{t'}$

Lediglich die letzte Bedingung, die genauer ausgeschrieben lautet: für alle $t, t' \in Z$ gibt es $\alpha \in \mathbb{R}^+$, sodaß für alle $a, b \in R$ $d_t(a,b) = \alpha d_{t'}(a,b)$, ist noch nicht geklärt. Sie fordert, daß die räumlichen Verhältnisse in den zu verschiedenen Zeitpunkten gehörenden räumlichen Ebenen für alle Zeitpunkte bis auf einen positiven Faktor gleich sind.In Figur 21) ändern sich also räumliche Abstandsverhältnisse nicht,wenn man zu höher gelegenen,d.h.zeitlich späteren Ebenen übergeht.Dieses Axiom ist für die klassische Theorie entscheidend.Es besagt,daß Raum und Zeit voneinander unabhängig sind.Daß der Raum unabhängig ist von der Zeit,wurde schon angedeutet: die räumlichen Verhältnisse sind zu allen Zeiten gleich.Umgekehrt hängen aber auch die zeitlichen Verhältnisse nicht von den räumlichen ab.Zum Beispiel ist für $a,b,a',b' \in R$ und $t,t' \in Z$:

$$d(t,a,b)-d(t',a,b)=d(t,a',b')-d(t',a',b').$$

Eine Ungleichung könnte man hier so auffassen,daß die Zeitabstände zwischen t und t' von den räumlichen Umgebungen (ausgedrückt durch $\langle a,b\rangle$ und $\langle a',b'\rangle$) abhängen,in denen sie untersucht werden.Nach Axiom 5) kann keine Ungleichung eintreten. (ÜIII-13).Für eine Raum-Zeit-Theorie,die diese Unabhängigkeit nicht benutzt,vergleiche [Balzer,1978].

Ein Modell der Raum-Zeit-Theorie liefert also eine in sich völlig starre Struktur: den "absoluten" Raum,der unverändert durch die "absolute" Zeit hindurch anwesend ist.In der Vorstellung von Figur 21) entspricht dem Raum eine Ebene,die man sich im Lauf der Zeit als nach oben gleitend vorzustellen hat. In der Ebene selbst findet keine Veränderung statt.

Der Zusammenhang zwischen Raum und Zeit wurde,soweit logisch nötig,durch Wahl einer dreistelligen (zeitabhängigen) Abstandsfunktion hergestellt und durch Axiom 5) dann soweit wie möglich eingeschränkt.

Ein reales Modell oder besser ein Teilmodell erhalten wir durch Koppelung des schon erwähnten Zimmers mit der beschriebenen Uhr.Der Raum im Zimmer bleibt unverändert,solange die Uhr läuft.Zu jedem Zeitpunkt (Stellung des Uhrzeigers) gibt es in dem Zimmer räumliche Verhältnisse,ausgedrückt durch eine Abstandsfunktion.Die Abstände kann man etwa mit Maßstäben vermessen.Zu einem anderen Zeitpunkt (Zeigerstellung) können wir wieder die räumlichen Verhältnisse ausmessen.Nichts hat sich geändert im Einklang mit Axiom 5).DIII-6-3) und 6-4) sind erfüllt,denn das Zimmer ist ein Modell der Geometrie und die Uhr ein Modell der Zeittheorie.Auch hier ist das reale Zimmer mit der realen Uhr wieder nur "eingebettet" in ein richtiges, sowohl räumlich als auch zeitlich unendliches Modell.

Die starren Raum-Zeit Modelle, die wir hier definierten, lassen keinen Platz für Bewegungen. Jedenfalls nicht, wenn man Bewegungen von Raumpunkten untereinander im Auge hat. (ÜIII-14). Die Raumpunkte bewegen sich untereinander überhaupt nicht. Die starre Raum-Zeit liefert lediglich einen Rahmen -eine "Arena"- , in dem man Bewegung von Teilchen, die keine Raumpunkte sind, beschreiben kann. Bevor wir sehen wie dies geschieht, seien noch einige Eigenschaften der Abstandsfunktion notiert (ÜIII-15).

TIII-1 Ist $x=\langle R,Z;\prec,d\rangle$ ein Modell der klassischen Raum-Zeit-Theorie, so gilt für alle $t\in Z$ und alle $a,b\in R$:

a) $d(t,a,b)=0$ gdw $a=b$

b) $d(t,a,b)=d(t,b,a)$

c) $d(t,a,c)\leq d(t,a,b)+d(t,b,c)$

Das heißt, für jeden Zeitpunkt ist die Funktion d_t eine Metrik.

TIII-2 Sind $\langle R,Z;\prec,d\rangle$ und $\langle R,Z;\prec,d'\rangle$ Modelle der klassischen Raum-Zeit-Theorie, ist $t\in Z$ und gilt $\underline{zw}_{d,t}=\underline{zw}_{d',t}$ und $\equiv_{d,t}=\equiv_{d',t}$, so gibt es $\alpha\in\mathbb{R}^+$ mit $d_t=\alpha d'_t$ (d.h. für alle $a,b\in R$ ist $d_t(a,b)=\alpha d'_t(a,b)$)

Der Beweis läßt sich z.B. mittels extensiver Systeme führen. Man konstruiert in einer Geometrie $\langle R;\underline{zw},\equiv\rangle$ eine natürliche $\leq$-Relation zwischen Punktepaaren ("ist kürzer als oder gleich lang") und eine "Konkatenationsoperation" $\circ$ für Punktepaare und beweist, daß die so entstehende Struktur ein extensives System ist. Aus der Theorie der extensiven Systeme weiß man dann, daß es eine bis auf einen Faktor eindeutige "repräsentierende" Funktion, die unserem d_t entspricht, gibt. Für Einzelheiten müssen wir auf [Krantz et al., 1971] und [Balzer & Kamlah, 1980] verweisen.

Intuitiv besagt TIII-2), daß die Abstandsfunktion d_t durch die Zwischen- und Kongruenzrelation mittels DIII-4b,c) bis auf einen Faktor eindeutig bestimmt ist. Wenn wir also DIII-4-b,c) nicht zur Definition von Zwischen- und Kongruenzrelation benutzen, sondern bei gegebener Zwischen- und Kongruenzrelation als Bedingungen auffassen,die d_t mit diesen Relationen verbinden,dann ist d_t schon eindeutig bis auf einen Faktor festgelegt.

KLASSISCHE KINEMATIK

Die klassische Kinematik erhält man,indem man in Modelle der klassischen Raum-Zeit-Theorie bewegte Teilchen "hineinsetzt".Dieses Hineinsetzen funktioniert wie folgt.Man nimmt ein Modell der Raum-Zeit-Theorie und fügt endlich viele Teilchen oder Partikel hinzu.Die Menge dieser Teilchen werde mit P,die Teilchen selbst mit p,p' oder p_i bezeichnet ($P=\{p_1,..,p_n\}$).Zu jedem Teilchen $p \in P$ gibt man nun an,an welchem Raumpunkt sich das Teilchen zu jedem Zeitpunkt befindet. Das heißt,man gibt zu jedem $p \in P$ eine Funktion i_p der Zeitpunkte in die Raumpunkte an,welche die "Bahn" von p beschreibt.Die Bahn i_p ist eine Funktion,die jedem Zeitpunkt $t \in Z$ den Raumpunkte zuordnet,an dem sich Partikel p zur Zeit t befindet.Haben wir es mit n Teilchen $p_1,..,p_n$ zu tun und fassen wir die verschiedenen Bahnen $i_{p_1},...,i_{p_n}$ wie früher zu einer einzigen Funktion durch die Definition $i(p,t):=i_p(t)$ zusammen,so können wir sagen,die Kinematik entstehe aus der Raum-Zeit-Theorie durch Hinzunahme einer solchen zusammenfassenden Bahnfunktion.

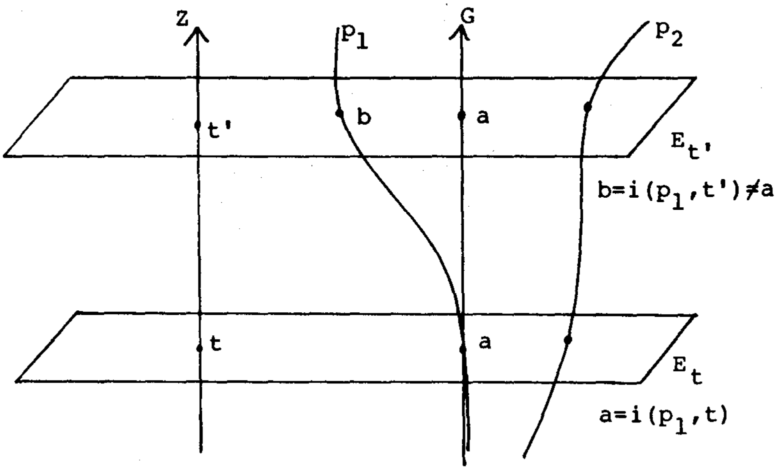
<u>DIII-7</u> $x \in M_p(KIN)$ gdw es $R,Z,P,\lessdot,d$ und i gibt,sodaß

1) $x=\langle R,Z,P;\lessdot,d,i\rangle$
2) $\langle R,Z;\lessdot,d\rangle$ ist ein potentielles Modell der klassischen Raum-Zeit-Theorie
3) P ist eine endliche Menge (von Partikeln)
4) $i:P \times Z \to R$
5) i ist C^∞ (ÜIII-16)

Die letzte Forderung sehen wir nicht als inhaltliches Axiom an. Daß Teilchenbahnen keine Sprünge oder Knicke machen,ist weniger ein empirisches Faktum als eine Forderung an unsere Art der Beschreibung.Die Zeitpunkte sollen so dicht aufeinanderfolgen,daß die Teilchen keine Gelegenheit haben, "zwischen" zwei Zeitpunkten einen Sprung auszuführen.

Die Vorstellung von Figur 21) muß durch Bahnen folgendermaßen ergänzt werden (siehe Figur 22).

Fig.22



Wir haben wieder die übereinandergeschichteten Ebenen,die die Raum-Zeit Struktur festlegen und den Rahmen bilden.Vertikal durch die Ebenen ziehen sich die verschiedenen Bahnen.Wir haben in Figur 22) zwei Bahnen,die zu Teilchen p_1 und p_2 gehören sollen,eingezeichnet.Zum Zeitpunkt t befindet sich p_1 in der räumlichen Ebene E_t an demjenigen Raumpunkt a,an dem im Bild die Bahn durch E_t hindurchstößt.Zum Zeitpunkt t' befindet sich p_1 an einem anderen,von a verschiedenen Raumpunkt (Ort) in der Ebene $E_{t'}$.Denn der Raumpunkt a hat seine Lage beim Übergang zu t' nicht verändert.Dies ist durch die Gerade G angedeutet.G wäre die Bahn eines Teilchens,das am Raumpunkt a ruht (ÜIII-17).

Die Redeweise,daß ein Teilchen sich an einem Raumpunkt befindet,scheint mit unseren intuitiven Vorstellungen nicht in Einklang zu stehen.Denn wo ein Raumpunkt ist,kann nicht zugleich ein Teilchen sein,wenn man die beiden als verschieden ansieht.Wir gestehen diese Skrupel gerne zu,betonen aber,daß die Physiker keine solchen haben.Man kann die Kinematik auch philosophisch befriedigender aufbauen,indem man diese intuitive Inkonsistenz vermeidet.Ein solcher Aufbau weicht aber stärker von physikalischen Vorstellungen und Denkweisen ab und ist auch komplizierter.Angenähert kann man sich den Sachverhalt so vorstellen,daß das Teilchen mit dem Raumpunkt "koinzidiert".Beide müssen dann nicht die gleiche Stelle besetzen,sondern sich nur "berühren".Das Teilchen steht sozusagen zunächst außerhalb des Raumes und kommt nur durch die Koinzidenzrelation mit Raumpunkten "in Berührung".

Als inhaltliche Axiome übernehmen wir die der klassischen Raum-Zeit-Theorie und fordern zusätzlich,daß die Teilchenbahnen i_p sich nicht schneiden.

<u>DIII-8</u> $x \in M(KIN)$ gdw es $R,Z,P,\lessdot,d$ und i gibt,sodaß

1) $x=\langle R,Z,P;\lessdot,d,i\rangle$
2) $x \in M_p(KIN)$
3) $\langle R,Z;\lessdot,d\rangle$ ist ein Modell der klassischen Raum-Zeit-Theorie
4) für alle $t \in Z$ und alle $p,p' \in P$: wenn $p \neq p'$,dann $i(p,t) \neq i(p',t)$

Das letzte Axiom besagt,daß zwei verschiedene Teilchen p und p' nicht zur gleichen Zeit am gleichen Ort sein können.Im Gegensatz zur Situation bei Teilchen und Raumpunkten sind hier Skrupel angebracht.Denn Teilchen als materielle Dinge können sich nicht durchdringen.

Der Übergang von der klassischen Raum-Zeit-Theorie zur Kinematik weist einige typische Merkmale auf,die man öfter antrifft.Wir wollen ihn daher von allgemeinerem Standpunkt aus betrachten.Zwei wesentliche Merkmale lassen sich unterscheiden.Erstens werden neue Grundbegriffe zu denen der Raum-Zeit-Theorie hinzugefügt,nämlich P und i.Man beachte,daß unter diesen im vorliegenden Fall auch ein nicht-relationaler vorkommt.P drückt ja keine Beziehung aus,sondern steht für eine Menge neuer Grundobjekte.Zweitens sind die Modelle der Kinematik so definiert,daß die "alten" Komponenten eines Kinematik Modells ($R,Z,\lessdot$ und d) ein Modell der Raum-Zeit-Theorie bilden (vergleiche DIII-8-3).Man kann also sagen,daß auf der Ebene der Modelle bei dem hier betrachteten Übergang Modelle der "früheren" Theorie als "Teile" von Modellen der "späteren"

Theorie auftreten.Oder anders: die spätere Theorie baut ihre Modelle auf Modellen der früheren Theorie auf.

Einen Übergang der betrachteten Art nennen wir Theoretisierung.Es ist also die Kinematik eine Theoretisierung der klassischen Raum-Zeit-Theorie.Die beiden besprochenen Eigenschaften lassen sich leicht allgemein beschreiben.

DIII-9 Sind T_1 und T_2 Theorien und gibt es $k,l,m,n \in \mathbb{N}$, sodaß alle Strukturen in $M(T_1)$ die Form $<x_1,..,x_k;y_1,..,y_l>$ und alle Strukturen in $M(T_2)$ die Form $<u_1,..,u_m;v_1,..,v_n>$ haben,so heißt T_2 eine Theoretisierung von T_1 ,nur wenn gilt:

1) $k \leq m$ und $l < n$
2) wenn $<u_1,..,u_m;v_1,..,v_n> \in M(T_2)$,dann
$$<u_1,..,u_k;v_1,..,v_l> \in M(T_1)$$

Hier bezeichnen $M(T_1)$ und $M(T_2)$ natürlich die Modellmengen der Theorien T_1 und T_2.Betrachten wir die Situation vom Standpunkt der Theoretisierung T_2 aus,so läßt sich die ursprüngliche Theorie T_1 durch Weglassen geeigneter Komponenten in Strukturen von T_2 gewinnen.Man braucht ja nur von $<u_1,..,u_m;v_1,..,v_n> \in M(T_2)$ die Komponenten $u_{k+1},..,u_m$ und $v_{l+1},..,v_n$ wegzulassen, um ein Modell von T_1 zu erhalten.Definieren wir eine Funktion

$$\theta: M(T_2) \rightarrow M(T_1),$$

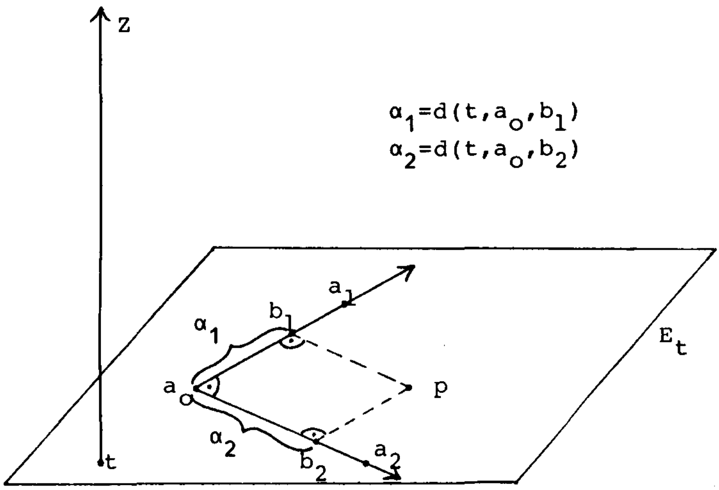
die gerade dies leistet,so könnte man θ eine Theoretisierungsfunktion nennen (ÜIII-18).

KLASSISCHE KINEMATIK MIT ORTSFUNKTION

In Modellen der klassischen Kinematik können wir eine auf ein Koordinatensystem bezogene Ortsfunktion einführen.Wir stellen uns dazu in den räumlichen Ebenen der zugrundeliegenden Raum-Zeit ein räumliches Koordinatensystem installiert, dessen Ursprung und dessen Achsen an bestimmten Raumpunkten $a_0,...,a_3$ festgemacht sind.Dieses Koordinatensystem bleibt wegen der "Starrheit" der Raum-Zeit über die Zeit hinweg gleich,wenn wir den Faktor α aus DIII-6-5) gleich 1 setzen.

Diese Setzung läßt sich interpretieren als Wahl einer Maßeinheit,die sich im Laufe der Zeit nicht ändern soll.Die Bahnen der durch die Kinematik eingeführten Partikel lassen sich in einem solchen Koordinatensystem durch Angabe von Koordinaten beschreiben.Genauer wird der Ort jedes Partikels zu jedem Zeitpunkt durch Angabe seiner Koordinaten auf den Achsen des Koordinatensystems angegeben.Dazu befinde sich das Teilchen zum betrachteten Zeitpunkt am Raumpunkt a.Die Koordinaten werden dann ermittelt,indem man von a aus die Lote auf die drei Koordinatenachsen fällt.Die Koordinaten von a sind definiert als die Abstände der Fußpunkte dieser Lote (also der Schnittpunkte der Lote mit den Koordinatenachsen) vom Koordinatenursprung.Man erhält so zu jedem Partikel und jedem Zeitpunkt drei Raumpunkte,die Fußpunkte der Lote auf die Koordinatenachsen.In Figur 23) ist ein zweidimensionales Koordinatensystem (mit zwei Achsen) eingezeichnet.Die Koordinaten des Partikels p zum Zeitpunkt t sind dann einfach die Zahlen $d(t,a_o,b_1)$ und $d(t,a_o,b_2)$.

Fig.23



So ist jedem Partikel zu jedem Zeitpunkt eindeutig ein Tripel von Zahlen $<\alpha_1,..,\alpha_3>$ zugeordnet.Diese Zuordnung nennen wir Ortsfunktion und bezeichnen sie mit s.Es ist also

$$s: P \times Z \to \mathbb{R}^3$$

und anschaulich sind die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ gerade die Koordinaten von Partikel p (zum Zeitpunkt t) (siehe Figur 23). Wir sagen auch, der Raumpunkt $i(p,t)$ habe die Koordinatendarstellung $i(p,t) = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ (ÜIII-19).

<u>DIII-10</u> Es sei $x = \langle R, Z, P; \lessdot, d, i \rangle$ ein Modell der klassischen Kinematik.

K heißt <u>ein Koordinatensystem für</u> x gdw es $a_o, \ldots, a_3$ gibt, sodaß $K = \langle a_o, \ldots, a_3 \rangle$ und

1) für $i, j \in \{1,2,3\}$ mit $i \neq j$ und alle $t \in Z$:

1.1) $a_i \in R$ und $a_o \in R$

1.2) $d(t, a_o, a_i) = 1$

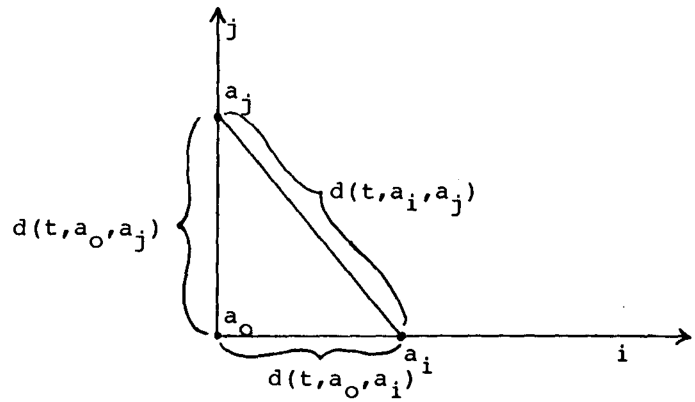
1.3) $d(t, a_o, a_i)^2 + d(t, a_o, a_j)^2 = d(t, a_i, a_j)^2$

2) für $i, j \in \{0,1,2,3\}$ und $t, t' \in Z$:

$d(t, a_i, a_j) = d(t', a_i, a_j)$

Das Koordinatensystem ist an den Raumpunkten $a_o, \ldots, a_3$ "festgemacht". a_o ist der Koordinatenursprung, der "Nullpunkt". $a_1, \ldots, a_3$ sind Punkte auf den jeweiligen Koordinatenachsen, die in positiver Richtung vom Ursprung eine Längeneinheit entfernt sind (DIII-10-1.2). Bedingung 1.3) besagt, daß je zwei Punkte a_i, a_j mit dem Ursprung a_o einen rechten Winkel bilden (siehe Figur 24).

Fig.24



Die Bedingung für den rechten Winkel ist mit Hilfe des Satzes von Pythagoras formuliert.Wenn dieser Satz in einem Dreieck gilt,so muß ein rechter Winkel vorliegen.Bedingung 2) ist in Raum-Zeit-Modellen wegen deren Starrheit von alleine erfüllt. Wir haben sie trotzdem formuliert,weil sie für den Begriff eines Koordinatensystems wesentlich ist.Sie besagt,daß die Punkte $a_o,..,a_3$ sich in der Zeit nicht gegeneinander bewegen (ÜIII-20).

Wir sagen,daß eine Funktion $s:P \times Z \rightarrow \mathbb{R}^3$ in einem kinematischen Modell x durch das Koordinatensystem K für x definiert sei,wenn die Funktionswerte s(p,t) gerade die Tripel der Koordinaten von p zur Zeit t sind.

<u>DIII-11</u> Sei $x=\langle R,Z,P;\lessdot,d,i\rangle$ ein Modell der klassischen Kinematik,$K=\langle a_o,..,a_3\rangle$ ein Koordinatensystem für x und $s:P \times Z \rightarrow \mathbb{R}^3$.

s heißt <u>in x durch K definiert</u> gdw es zu jedem $p \in P$ und jedem $t \in Z$ Raumpunkte $b_1,..,b_3$ gibt,sodaß

1) $s(p,t)=\langle d(t,a_o,b_1),...,d(t,a_o,b_3)\rangle$

2) für j=1,2,3 gilt

2.1) b_j liegt auf der Geraden durch a_o und a_j (ÜIII-21)

2.2) $d(t,a_o,b_j)^2+d(t,b_j,i(p,t))^2=d(t,a_o,i(p,t))^2$

Bedingung 2) besagt,daß $b_1,..,b_3$ die Fußpunkte der Lote von i(p,t) auf die Achsen des Koordinatensystems K sind.Wir definieren nun Modelle der Kinematik mit Ortsfunktion.

<u>DIII-12</u> x ist ein Modell der <u>Kinematik mit Ortsfunktion</u> gdw es $R,Z,P,\lessdot,d,i$ und s gibt,sodaß

1) $x=\langle R,Z,P;\lessdot,d,i,s\rangle$

2) $y:=\langle R,Z,P;\lessdot,d,i\rangle \in M(KIN)$

3) $s:P \times Z \rightarrow \mathbb{R}^3$

4) es gibt K,sodaß gilt:

4.1) K ist ein Koordinatensystem für y

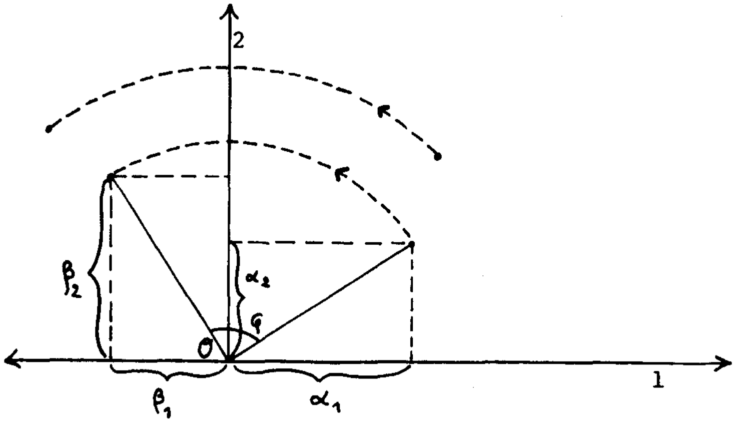
4.2) s ist in y durch K definiert

Modelle der Kinematik mit Ortsfunktion entstehen also aus Modellen der Kinematik,indem man dort Koordinatensysteme einführt und durch diese die Ortsfunktion s definiert.Man beachte aber,daß in einem Modell der Kinematik mit Ortsfunktion die

Ortsfunktion *nicht* durch die anderen Komponenten des Modells eindeutig bestimmt ist.s ist zwar eindeutig bestimmt,wenn man ein festes Koordinatensystem vorgibt.Da in DIII-12) aber nur die *Existenz* eines Koordinatensystems gefordert ist und es viele verschiedene Koordinatensysteme gibt (ÜIII-22),kann man auch zu all diesen verschiedene Ortsfunktionen finden.s ist also in der Theorie,deren Modelle die Kinematiken mit Ortsfunktion sind,nicht definierbar.

Durch die bisherigen Definitionen gut gerüstet,können wir uns nun einem wichtigen Punkt zuwenden: der Invarianz.Den Ausgangspunkt bildet die Aussage,daß "Kinematik mit Ortsfunktion invariant unter räumlichen Drehungen und Verschiebungen" sei oder daß "in der Kinematik mit Ortsfunktion die Ortsfunktion unter solchen Transformationen invariant" sei.Unser Ziel ist, genauer zu beschreiben und zu verstehen,was dies heißt und sodann zu klären,wie die Invarianz zustande kommt.Die erste Aufgabe ist dabei der leichtere Teil.Daß die Kinematik mit Ortsfunktion invariant unter räumlichen Drehungen ist,bedeutet folgendes.Wenn x eine Kinematik und $\langle x,s\rangle$ eine Kinematik mit Ortsfunktion ist und s' aus s durch "räumliche Drehung" hervorgeht,so ist auch $\langle x,s'\rangle$ eine Kinematik mit Ortsfunktion. Genau das gleiche Schema kann man benutzen,um zu erklären,was es heißt,daß die Kinematik mit Ortsfunktion unter räumlichen Verschiebungen invariant sei.Man muß dabei einfach s' als aus s durch räumliche Verschiebung hervorgegangen denken.Rein formal läßt sich "Drehung" durch Multiplikation der Funktion s mit einer orthogonalen Matrix $\mathfrak{A}$ und "Verschiebung" durch Addition eines Vektors $\mathfrak{b} \in \mathbb{R}^3$ ausdrücken (ÜIII-23).Anschaulich muß man sich die Sache in einem Koordinatensystem vorstellen.In Figur 25) sind in einem zweidimensionalen Koordinatensystem zwei Punkte a und a' eingezeichnet.Räumliche Drehung bedeutet,daß alle Punkte außer den Koordinatenachsen relativ zum Koordinatensystem um den Ursprung mit einem bestimmten Winkel φ gedreht werden.Solche Drehungen werden in der Tat formal durch orthogonale Matrizen geleistet.Hat a zum Beispiel die Koordinatendarstellung $\langle \alpha_1,\alpha_2\rangle$,so gibt es eine orthogonale Matrix $\mathfrak{A}$,sodaß der gedrehte Punkt a' gerade die Koordinaten $\mathfrak{A}\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle^T=\langle\beta_1,\beta_2\rangle$ hat.

Fig.25



Da auch die Werte der Ortsfunktion solche Koordinatenvektoren im $\mathbb{R}^3$ sind,kann man Drehungen auf die Funktionswerte ausüben, indem man sie mit Matrizen multipliziert.Eine Drehung der Funktion s wird formal insgesamt dadurch erreicht,daß man für alle p und t definiert $s'(p,t):=\mathfrak{A}s(p,t)$. s' ist dann die "gedrehte" Ortsfunktion.Analog wird für Verschiebungen ein konstanter Vektor $\mathfrak{b}=\langle\beta_1,\ldots,\beta_3\rangle$ addiert.Man erhält für die verschobene Ortsfunktion s':

$$\text{für alle } p\in P \text{ und } t\in Z\text{: } s'(p,t)=s(p,t)+\mathfrak{b}.$$

Bevor wir uns der Frage zuwenden,wie die Invarianz zustande kommt,seien die bisherigen Ergebnisse in Form eines Satzes zusammengestellt.

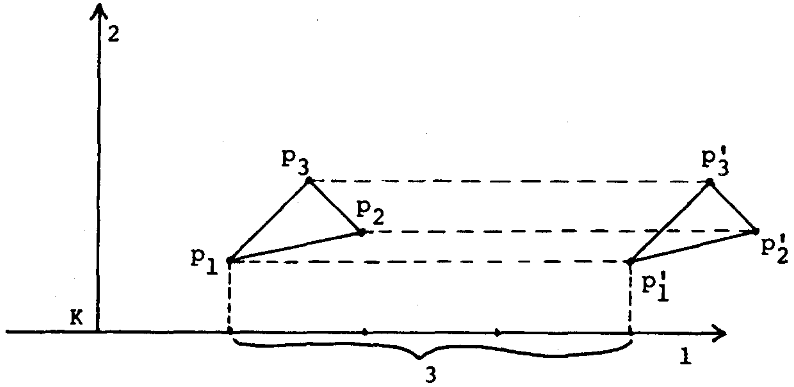
TIII-3 a) Zu jedem $x\in M(KIN)$ gibt es ein s,sodaß $\langle x,s\rangle$ eine klassische Kinematik mit Ortsfunktion ist

b) Für alle $x\in M(KIN)$,alle orthogonalen 3×3 Matrizen $\mathfrak{A}$, alle $\mathfrak{b}\in\mathbb{R}^3$ und alle s: ist $\langle x,s\rangle$ eine klassische Kinematik mit Ortsfunktion,so auch $\langle x,\mathfrak{A}s+\mathfrak{b}\rangle$ (ÜIII-24)

$\mathfrak{A}s+\mathfrak{b}$ in TIII-3b) ist natürlich eine Ortsfunktion,die aus s durch Drehung um $\mathfrak{A}$ und anschließende Verschiebung um $\mathfrak{b}$ hervorgeht.TIII-3b) drückt aus,daß die Ortsfunktion s unter Transformationen invariant ist,durch die s in $\mathfrak{A}s+\mathfrak{b}$ überführt wird. Diese Transformationen muß man sich in Modellen der Theorie innerhalb der räumlichen Ebenen E_t vorstellen.

Wie kommt diese Invarianz zustande? Wir machen uns dies am Fall der Verschiebungen klar. Dazu betrachten wir ein Partikelsystem, bestehend aus z.B. drei Partikeln (siehe Figur 26), dessen Orte (Zeit spielt hier keine Rolle) in einem Koordinatensystem K gegeben sind.

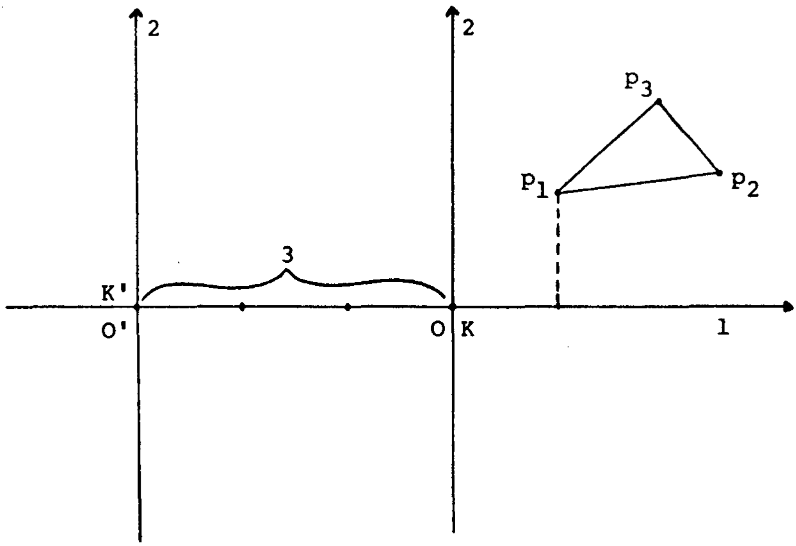
Fig.26



TIII-3b) sagt, daß das gleiche System, wenn man nur zu der Ortsfunktion einen Vektor $\mathfrak{b}$ addiert, immer noch ein Modell ist. Wählen wir in Figur 26) als $\mathfrak{b}$ den Vektor <3,0> ,so erhält man, <u>relativ zum vorliegenden Koordinatensystem</u>, neue Punkte $p_1',\dots,p_3'$, deren Orte gerade gegeben sind durch $s(p_i',t)=s(p_i,t)+\mathfrak{b}$. Das sieht in der Zeichnung so aus, als ob die Partikel p_i relativ zum Koordinatensystem verschoben worden seien. Aber diese Vorstellung ist nicht korrekt. Tatsächlich wurde am Partikelsystem <u>überhaupt nichts</u> geändert. Es wurde lediglich eine mathematische Transformation mit den Funktionswerten der Ortsfunktion s ausgeführt. Wir müssen uns die Sache also anders vorstellen.

Stellen wir uns also vor, wir säßen auf einem der Partikel p_i. Was muß dann geschehen, damit die Ortsfunktion s in ihre transformierte Form $s+\mathfrak{b}$ übergeht? Man findet die Antwort, wenn man überlegt, daß s durch ein Koordinatensystem definiert ist. Wie kommt man von s zu $s+\mathfrak{b}$, oder anders: durch welches Koordinatensystem K' ist $s+\mathfrak{b}$ definiert? Sicher nicht durch das gleiche Koordinatensystem K, durch welches s gegeben ist. Denn in einem Koordinatensystem sind die Orte der Partikel eindeutig bestimmt. $s(p,t)$ und $s(p,t)+\mathfrak{b}$ haben aber verschiedene Werte, wenn $\mathfrak{b}$ vom Nullvektor verschieden ist. Also muß $s+\mathfrak{b}$, die transformierte Ortsfunktion, durch ein von K verschiedenes Koordinatensystem K' definiert sein. Im Fall der Verschiebung von Figur 26) entsteht K' aus K durch Verschiebung um $-\mathfrak{b}$. In Figur 27) sind beide Koordinatensysteme eingezeichnet.

Fig. 27



Der Ursprung O' von K' ist vom Ursprung O von K um drei Einheiten nach links verschoben. Man sieht sofort, daß die Partikel p_1, p_2, p_3 in K' tatsächlich die Ortsfunktion $s+\mathfrak{b}$ haben. Zum Beispiel ist die erste Koordinate von p_1 in K' gerade gleich der um 3 Einheiten verlängerten Koordinate von p_1 in K. Das heißt, wenn wir die Ortsfunktion in K' mit s' bezeichnen, daß sich für alle $p \in P$ und $t \in Z$

$$s'(p,t)=s(p,t)+\mathfrak{b}$$

beweisen läßt.

Der tiefere Grund für die Invarianz liegt also darin, daß man ein Partikelsystem von verschiedenen Koordinatensystemen aus beschreiben kann, ohne daß dabei das System selbst irgendwie beeinflußt wird. Wenn das System selbst unverändert bleibt, müssen all diese verschiedenen Beschreibungen zu äquivalenten Ergebnissen führen.Oder anders: wenn das System in einer Beschreibung von Koordinatensystem K aus ein Modell bildet,so auch in jeder anderen Beschreibung,von einem anderen Koordinatensystem K' aus.

Wir fassen zusammen.Die Invarianz der Kinematik mit Ortsfunktion besagt,daß der Übergang von einer Ortsfunktion zu einer räumlich gedrehten und verschobenen Ortsfunktion nicht aus der Klasse der Modelle herausführt.Der Grund dafür ist, daß die verschiedenen Ortsfunktionen nichts weiter als verschiedene Beschreibungen des gleichen Systems von verschiedenen Koordinatensystemen aus sind.Da das beschriebene System immer das gleiche ist,müssen alle verschiedenen Beschreibungen Modelle liefern,weil andernfalls die Theorie wesentlich vom gerade eingenommenen Standpunkt (d.h. vom Koordinatensystem) abhinge.Eine solche Abhängigkeit ist nicht erwünscht und sie ist auch empirisch für eine große Klasse von Koordinatensystemen annähernd nicht vorhanden.Diese Klasse enthält z.B. alle fest mit der Erdoberfläche verbundenen Koordinatensysteme.

THEORETISCHE INVARIANZ

Die im letzten Abschnitt diskutierte Invarianz der Ortsfunktion ist ein Beispiel für theoretische Invarianz.Bei der Einführung eines neuen Terms (z.B. der Ortsfunktion) stellt man fest,daß verschiedene "Exemplare" (oder "Elemente" im Sinn von Kap.I) dieses Terms das gleiche leisten: alle liefern Modelle.Die verschiedenen Möglichkeiten -Modelle- sind dabei in wohlbestimmter Weise durch Transformationen einer genau bekannten und festgelegten Art miteinander verbunden.Die Axiome,die mit dem neuen Term formuliert werden,sind dann invariant unter diesen Transformationen.

Allgemein läßt sich die theoretische Invarianz im Rahmen einer Theorie T folgendermaßen ausdrücken.$T=\langle M_p,M,M_{pp},Q,I\rangle$ sei gegeben durch die aus den Beispielen bekannten Komponenten.Wir stellen uns die partiellen Modelle so vor,daß sie schon die nicht-theoretischen Axiome der Theorie realisieren. Es werden nun neue Terme eingeführt,nämlich die theoretischen

Terme von T. Theoretische Invarianz drückt eine Invarianz bei Transformationen dieser Terme aus. Aus Gründen eleganter Formulierung lassen wir die Transformationen aber nicht auf einzelne theoretische Komponenten wirken, sondern auf ganze potentielle Modelle. Die Überführung einer theoretischen Komponente in eine transformierte entspricht dann der Überführung eines potentiellen Modells in ein anderes potentielles Modell, in dem genau die betrachtete Komponente transformiert ist, während alle anderen Komponenten identisch bleiben.

Der Begriff der Transformation gibt in natürlicher Weise Anlaß zu einer Äquivalenzrelation. Es bietet sich an, zwei potentielle Modelle als äquivalent zu bezeichnen, wenn sie sich durch Transformationen ineinander überführen lassen (ÜIII-25). Wir sagen von einer solchen Äquivalenzrelation auf den potentiellen Modellen, sie stifte theoretische Invarianz, wenn sie mit den Modellen verträglich ist, d.h. wenn alle zu einem Modell äquivalenten Strukturen auch wieder Modelle sind.

<u>DIII-13</u> Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M_p. $\sim$ <u>stiftet theoretische Invarianz</u> gdw für alle $x,y \in M_p$ gilt:

1) wenn $x \in M$ und $y \sim x$, dann $y \in M$
2) wenn $x \sim y$, dann $r(x)=r(y)$

Bedingung 2) garantiert, daß es sich um <u>theoretische</u> Invarianz handelt: bei den Transformationen oder beim Übergang zu äquivalenten Strukturen bleiben die nicht-theoretischen Komponenten unberührt.

Ist für eine Theorie T eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf M_p mit diesen Eigenschaften gegeben, so kann man sagen, T sei invariant unter Transformationen, welche potentielle Modelle in äquivalente potentielle Modelle überführen.

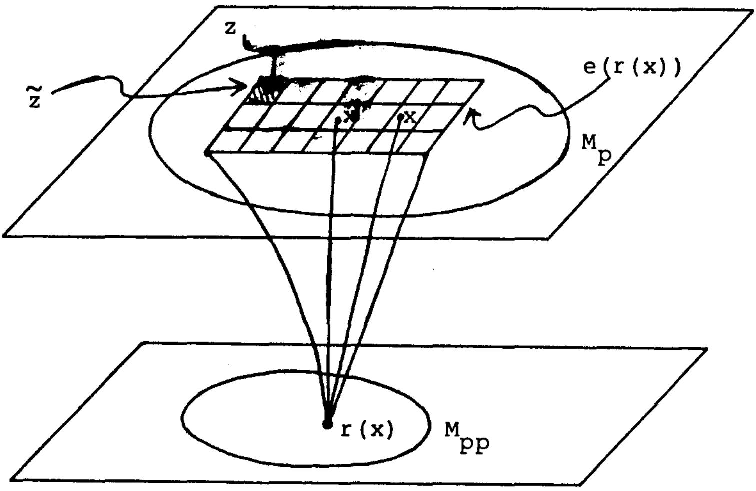
Betrachten wir die empirische Behauptung einer solchen Theorie, wobei vorausgesetzt werde, daß die Querverbindungen keine Rolle spielen. Die Behauptung lautet dann: $I \subseteq \bar{r}(M)$, oder etwas expliziter: "es gibt $X \subseteq M$, sodaß $\bar{r}(X)=I$". Man sieht sofort, daß sich am Wahrheitswert dieser Behauptung nichts ändert, wenn man X durch eine Menge X' äquivalenter potentieller Modelle ersetzt. Denn wegen 2) von DIII-13) gilt $\bar{r}(X')=\bar{r}(X)$ und wegen 1) dieser Definition ist weiterhin $X' \subseteq M$. Es gilt also:

> Bei einer theoretisch invarianten Theorie ist die Behauptung "$\bar{r}(X)=I \wedge X \subseteq M$" unter Ersetzung theoretischer Terme durch äquivalente theoretische Terme invariant.

Diese Tatsache rechtfertigt es überhaupt erst,von "Invarianz" zu reden.Bei einer theoretisch invarianten Theorie bleibt tatsächlich etwas unter bestimmten Transformationen invariant ("unverändert"),nämlich der Wahrheitswert der "entquantifizierten" empirischen Behauptung.

Man kann denselben Sachverhalt auch formal etwas anders betrachten.Dazu gehen wir von einem potentiellen Modell x aus und bilden die Menge aller theoretischen Ergänzungen von r(x), also e(r(x)).Stiftet die Äquivalenzrelation $\sim$ auf M_p theoretische Invarianz,so muß die Äquivalenzklasse von x bezüglich $\sim$,die wir mit $\tilde{x}$ bezeichnen,Teilmenge von e(r(x)) sein (ÜIII-26).Es ist aber nicht ausgeschlossen,daß e(r(x)) nichtäquivalente Strukturen enthält.Ist $x' \in e(r(x))$ und gilt (nicht: $x \sim x'$),so liegt auch die Äquivalenzklasse $\tilde{x}'$,die mit $\tilde{x}$ disjunkt ist,in e(r(x)).Man zeigt leicht,daß e(r(x)) in Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ zerfällt (siehe Figur 28).

Fig.28



Da die empirische Behauptung unter Ersetzung theoretischer Komponenten durch äquivalente invariant ist,enthält sie eine

Unbestimmtheit.Es wird zwar behauptet,daß sich die intendierten Anwendungen durch theoretische Komponenten zu Modellen ergänzen lassen,aber gleichzeitig sind diese theoretischen Ergänzungen bis auf Äquivalenz notwendigerweise unbestimmt.Man behauptet,daß es eine theoretische Ergänzung gibt,aber welche theoretischen Funktionen nun genau zu wählen sind,wird durch die Theorie nicht festgelegt.Alle äquivalenten Funktionen sind gleichermaßen "zugelassen".

Nun ist es verständlich,nach einer möglichst genauen Festlegung der theoretischen Terme zu streben.Wenn hier in der Theorie eine Unbestimmtheit (bis auf eine Äquivalenzrelation) auftritt,so liegt es nahe,die Unbestimmtheit durch Äquivalenzklassenbildung zu eliminieren.Dieser Trick,der in der Mathematik häufig angewandt wird,besteht darin,ganze Äquivalenzklassen als neue "Objekte" -hier also als theoretische Komponenten- aufzufassen.Statt von der Ergänzung intendierter Anwendungen durch theoretische Funktionen müßte man dann von der Ergänzung durch Äquivalenzklassen theoretischer Funktionen reden.Das sieht zunächst etwas merkwürdig aus, bringt aber,nachdem man sich daran gewöhnt hat,die von der Äquivalenz hervorgerufene Unbestimmtheit der theoretischen Terme zum Verschwinden.In Figur 28) bedeutet dies,daß man die Äquivalenzklassen $\tilde{x}$ nicht als Klassen von Strukturen,sondern als je ein neues Objekt betrachtet.Es ist klar,daß hierdurch nicht jede Unbestimmtheit der theoretischen Terme eliminiert wird.Wenn wie in Figur 28) ein partielles Modell r(x) mehrere nicht-äquivalente Ergänzungen hat,so bleibt die Unbestimmtheit der theoretischen Ergänzungen auch beim Übergang zu Äquivalenzklassen erhalten.r(x) läßt sich durch mehrere Äquivalenzklassen theoretisch ergänzen,wobei nicht eindeutig festliegt,welche dieser Möglichkeiten zu wählen ist.

Noch anders kann man sagen,daß für die empirische Behauptung der Theorie nur die Äquivalenzklassen $\tilde{x}$ in M_p relevant sind,nicht aber die einzelnen potentiellen Modelle.In der empirischen Behauptung wird "im Prinzip" mit Hilfe von Äquivalenzklassen etwas behauptet und empirischer Gehalt -wenn vorhanden- kommt nur durch die Existenz geeigneter solcher Klassen zustande.

Bei diesen Überlegungen wurden die Querverbindungen als leer unterstellt. Sind Querverbindungen vorhanden, so muß eine Äquivalenzrelation noch zusätzliche Bedingungen erfüllen, um theoretische Invarianz zu stiften, die sich in der Invarianz einer bestimmten Behauptung ausdrückt (ÜIII-27).

Im Beispiel der Kinematik mit Ortsfunktion wird man die Modelle der Kinematik (ohne Ortsfunktion) als nicht-theoretische Strukturen und die Ortsfunktion s als theoretischen Term behandeln. Es ist also $r(\langle R,Z,P; <,d,i,s\rangle)=\langle R,Z,P; <,d,i\rangle$. Die potentiellen Modelle entstehen aus den Modellen, indem die Axiome weggelassen werden, die ausdrücken, daß s durch ein Koordinatensystem definiert ist. Das heißt, in potentiellen Modellen der Kinematik mit Ortsfunktion sind nur Bedingungen 1)-3) von DIII-12) erfüllt. Wir bezeichnen die Klasse aller potentiellen Modelle der Kinematik mit Ortsfunktion mit $M_p(KIN+s)$. Auf $M_p(KIN+s)$ definieren wir nun eine Äquivalenzrelation durch

$$\langle x,s\rangle \sim \langle y,s'\rangle \text{ gdw } x=y \text{ und es gibt eine orthogonale Matrix } \mathfrak{A} \text{ und einen Vektor } \mathfrak{b}, \text{ sodaß } s'=\mathfrak{A}s+\mathfrak{b}.$$

Man zeigt, daß $\sim$ tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist (ÜIII-28). Darüberhinaus stiftet $\sim$ auch theoretische Invarianz. Das ist gerade die Aussage von TIII-3b). In die empirische Behauptung gehen also nach unseren obigen Überlegungen nicht einzelne Ortsfunktionen ein, sondern ganze Äquivalenzklassen von Ortsfunktionen. Das ist nicht verwunderlich, sondern war zu erwarten. Was immer mittels Ortsfunktionen über kinematische Systeme ausgesagt wird: die Aussage soll unabhängig vom speziell gewählten Koordinatensystem sein und damit auch für alle äquivalenten Ortsfunktionen gelten.

Eine besonders befriedigende Situation liegt vor, wenn jede Ergänzungsmenge $e(r(x))$ aus genau einer Äquivalenzklasse besteht. Denn dann ist die Unbestimmtheit, mit der die theoretischen Terme behaftet sind, vollständig durch die Äquivalenzrelation erfaßt. Nach Identifikation äquivalenter theoretischer Terme sind die durch die Theorie als Ergänzungen zugelassenen Terme eindeutig bestimmt. Wir sagen dann, daß die theoretische Invarianz die Unbestimmtheit der theoretischen Terme vollständig erfasse.

Die Kinematik mit Ortsfunktion liefert ein Beispiel für diese ideale Situation.Die theoretische Invarianz erfaßt die Unbestimmtheit der Ortsfunktion vollständig.Mit anderen Worten gilt der folgende Satz.

TIII-4 Sind $\langle x,s\rangle$ und $\langle x,s'\rangle$ Modelle der Kinematik mit Ortsfunktion,so gilt $\langle x,s\rangle \sim \langle x,s'\rangle$

Man beachte,daß die Raum-Zeit-Struktur in beiden Systemen die gleiche ist,nämlich x.TIII-4) läßt sich daher auch so umschreiben,daß es die eindeutige Bestimmtheit (bis auf die in $\sim$ enthaltenen Transformationen) von s durch x aussagt.

KLASSISCHE MECHANIK

Wir führen nun die klassische Mechanik als Theoretisierung der Kinematik mit Ortsfunktion ein.Die neu hinzutretenden theoretischen Terme sind Masse m und Kraft f.Die Modelle der Mechanik haben dann folgende Struktur.

DIII-14 x ist ein Modell der klassischen Mechanik ($x \in M(MECH)$) gdw es R,Z,P, $\lessdot$,d,i,s,m und f gibt,sodaß

1) $x=\langle R,Z,P;\lessdot,d,i,s,m,f\rangle$
2) $\langle R,Z,P;\lessdot,d,i,s\rangle \in M(KIN+s)$
3) $m:P \rightarrow \mathbb{R}^+$
4) $f:P\times Z\times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist C^∞
5) für alle $p \in P$ und $t \in Z$: $m(p)\cdot \ddot{s}(p,t)=\sum_{i=1}^{\infty} f(p,t,i)$

Die Massenfunktion m ordnet jedem Teilchen eine positive Zahl zu,die dessen Masse angibt.Kraft wird als eine Funktion eingeführt,die jedem Teilchen,jedem Zeitpunkt und jeder natürlichen Zahl einen Vektor in $\mathbb{R}^3$ zuordnet.Die natürliche Zahl im dritten Argument von f fungiert als Index für verschiedene Kraftarten oder "Kraftkomponenten".Hält man i fest und läßt nur p und t variieren,so erhält man eine Funktion,die wir mit f_i bezeichnen und die definiert ist durch

$$f_i(p,t):=f(p,t,i).$$

Für verschiedene Indizes i stehen die Funktionen f_i für verschiedene Kraftarten.Zum Beispiel kann f_1 die Gravitationskraft sein,f_2 die Coulombsche Kraft,f_3 eine Hooke'sche Kraft usw. In verschiedenen Modellen braucht diese Indizierung nicht gleich zu sein.In einem anderen Modell kann z.B. f_1 die Coulombsche Kraft sein.Da man die verschiedenen Kraftarten durch "Superposition" (Überlagerung) (ÜIII-29) kombinieren kann,besteht die Möglichkeit,immer weitere,"neue",zusammengesetzte Kraftarten zu bilden.Daher sind unendlich viele Indizes vorgesehen.Die Funktionswerte enthalten als Vektoren Information über Größe und Richtung der Kraft.Wir lesen "$f(p,t,i)=\langle\alpha_1,..,\alpha_3\rangle$" als "die auf p zur Zeit t wirkende i-te Kraft ist gegeben durch den Vektor $\langle\alpha_1,..,\alpha_3\rangle$".Die Forderung nach Differenzierbarkeit der Ortsfunktion (DIII-14-4) hätten wir auch schon für Modelle der Kinematik mit Ortsfunktion aufstellen können.Wir haben darauf verzichtet,um die Theoreme der beiden letzten Abschnitte nicht noch mehr zu verkomplizieren. Bedingung 5) ist das bekannte zweite Newtonsche Axiom: "Kraft ist gleich Masse mal Beschleunigung".Die linke Seite der Gleichung stellt dabei "Masse mal Beschleunigung" dar.$\ddot{s}$ bezeichnet in Physikerschreibweise die zweite Ableitung der Ortsfunktion s nach der Zeit,also nach dem zweiten Argument von s.Auf der rechten Seite der Gleichung steht die Kraft.Der Ausdruck $\sum_{i=1}^{\infty} f(p,t,i)$ wird als die auf p zu t wirkende <u>Gesamtkraft</u> bezeichnet.Sie ist einfach die Summe aller auf p zu t wirkenden verschiedenen Kraftarten.In konkreten Fällen wird dabei die Summe stets endlich sein,d.h. für Summanden $f(p,t,i)$ mit Index i größer einer festen Zahl n_o wird $f(p,t,i)$ Null sein.Wir bemerken,daß in Newtons originaler Formulierung die linke Seite als "Impulsänderung" bezeichnet wird.Der Impuls ist bei uns,wie heute allgemein üblich,definiert als "$m\cdot\dot{s}$ ",sodaß unsere Formulierung,die sich in fast allen Lehrbüchern findet,nur eine unwesentliche Variante des Originals darstellt.

In den üblichen Darstellungen der Mechanik treten die Komponenten $\prec$,d und i nicht auf und die Mengen R und Z sind ersetzt durch $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}$.Dann ist $s:P \times \mathbb{R} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^3$ und man kann $\triangleleft$,d und i weglassen,weil sie in den vorhandenen Strukturen schon enthalten,d.h.definierbar sind.Die zeitliche Ordnungsrelation ist -wie auch bei uns- in $\mathbb{R}$ explizit definierbar.Auch d kann in einer "Raumstruktur" $\mathbb{R}^3$ definiert werden durch

$$d(t,a,b) := \|a-b\| \text{ ,wobei}$$

$$\|\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_3\rangle\| = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{3} \alpha_i^{\,2}\right)}$$

die euklidische Norm ist (man beachte,daß bei $R = \mathbb{R}^3$ a und b Vektoren sind). i schließlich läßt sich durch s definieren.Man setzt einfach

$$i(p,t) := s(p,t).$$

Diese Formulierung der Mechanik hat sicher den Vorteil der Einfachheit und Eleganz.Sie hat aber den Nachteil,daß die Invarianz der Ortsfunktion unter räumlichen Drehungen und Verschiebungen,die stets in die sogenannte Galileiinvarianz der Mechanik miteinbezogen wird,sich nicht einsehen läßt.Man rechnet einfach nach,daß sie vorliegt und fertig.Nur wenn man die zugrundeliegende Raumtheorie in der von uns gewählten -oder ähnlicher- Form mit einbezieht,läßt sich diese Invarianz einsehen und verstehen.Es sei hier bemerkt,daß auf ähnliche Weise,also durch Einbeziehung der zugrundeliegenden Zeittheorie,sich auch die Invarianz der Mechanik unter Zeittranslationen begründen läßt.Wir haben hierauf verzichtet,um den dadurch entstehenden Komplikationen zu entgehen.Der interessierte Leser sei auf [Balzer,1982a] hingewiesen.

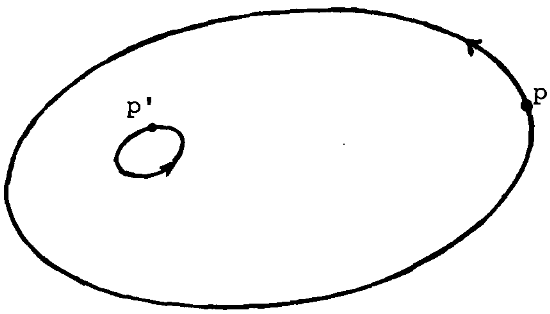
Als Beispiel betrachten wir ein System bestehend aus zwei Teilchen p und p',die die Massen $m(p)=1$ und $m(p') = 10^6$ haben mögen.p' ist also "viel größer" als p.Auf beide Teilchen mögen nur Gravitationskräfte wirken,sodaß das System dem Newtonschen Gravitationsgesetz gehorcht,das im betrachteten Spezialfall aus den zwei Gleichungen

$$f_1(p,t) = -g\cdot m(p)m(p')[s(p,t)-s(p',t)]\|s(p,t)-s(p',t)\|^{-3}$$

$$f_1(p',t) = -g\cdot m(p)m(p')[s(p',t)-s(p,t)]\|s(p',t)-s(p,t)\|^{-3}$$

besteht.Alle f_i mit $i > 1$ seien Null.Die Bahnen der Teilchen, d.h. ihre Ortsfunktionen sind dann eindeutig bestimmt, wenn man die Orte und Geschwindigkeiten beider Teilchen zu einem Zeitpunkt (die sogenannten "Anfangswerte") kennt oder festlegt. Wählen wir etwa $s(p,0)=\langle 1,0,0\rangle$, $s(p',0)=\langle -1,0,0\rangle$, $\dot{s}(p,0)=\langle -1/4g\cdot m(p'),0,0\rangle$ und $\dot{s}(p',0)=\langle 1/4g\cdot m(p),0,0\rangle$, so beschreiben die Ortsfunktionen, die als Lösungen der obigen Gleichungen gefunden werden, ein System, in dem die beiden Teilchen auf einer Geraden aufeinander zu fallen, bis sie schließlich zusammenprallen. Entscheidend hierfür ist die Richtung der Anfangsgeschwindigkeiten $\dot{s}(p,0)$ und $\dot{s}(p',0)$. Nur wenn diese Geschwindigkeiten nicht entlang der Verbindungsgeraden der Teilchen wirken, sind Ellipsen, wie wir sie aus unserem Planetensystem kennen, als Bahnen möglich. Ist etwa $\dot{s}(p,0)=\langle 0,100,0\rangle$ und $\dot{s}(p',0)=\langle 0,0,0\rangle$, so liefern die Gravitationsgleichungen Bahnen der in Figur 29) gezeichneten Art.

Fig.29



Es handelt sich um zwei Ellipsen. Da die Masse von p' viel größer ist als die von p, gerät die Ellipse von p' relativ klein und liegt ganz innerhalb der von p durchlaufenen Ellipse. Genau diese Situation liegt bei Sonne und Erde vor. Die Sonne bewegt sich aufgrund ihrer gegenüber der Erde sehr großen Masse kaum (relativ zur Erde). Man kann sie näherungsweise sogar als unbewegt ansehen. Die Erde beschreibt um sie herum eine Ellipse.

Die potentiellen Modelle der Mechanik werden genauso definiert wie die Modelle, nur daß das zweite Newtonsche Axiom nicht gefordert ist. Auf der Klasse M_p(MECH) aller potentiellen Modelle definieren wir eine Äquivalenzrelation wie folgt.

DIII-15 Für $x=\langle y,m,f\rangle$ und $x'=\langle y',m',f'\rangle \in M_p(\mathrm{MECH})$ gelte

$x \sim_1 x'$ gdw $y=y'$ und für alle p und alle t:

$$\sum_{i=1}^{\infty} f'(p,t,i)=[m'(p)/m(p)]\cdot \sum_{i=1}^{\infty} f(p,t,i)$$

Man rechnet nach, daß $\sim_1$ tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist, die darüberhinaus theoretische Invarianz stiftet (ÜIII-30). Zu einem vorgegebenen kinematischen System sind also $\langle m,f\rangle$ und $\langle m',f'\rangle$ gleich gute Ergänzungen, falls nur f' die Gleichung in DIII-15) erfüllt.

EMPIRISCHE INVARIANZ

Betrachten wir zwei partielle Modelle der Mechanik, d.h. zwei Kinematiken mit Ortsfunktion x und x'. Die in x bzw. in x' vorkommenden Komponenten seien mit keinem bzw. einem Strich versehen. Wir setzen voraus, daß $P=P'$ und $R=R'$. $Z=Z'$ gilt per Definition. Weiter seien $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Vektoren in $\mathbb{R}^3$. Schließlich gelte für alle $p \in P$ und alle $t \in Z$

(*) $$s(p,t)=s'(p,t)+\mathfrak{v}\, t+\mathfrak{b}\, .$$

Intuitiv bedeutet die Gleichung, daß das durch s beschriebene System aus dem durch s' beschriebenen dadurch hervorgeht, daß man letzteres einmal räumlich um $\mathfrak{b}$ verschiebt und zum anderen in konstante, gleichförmige Bewegung versetzt, deren Größe und Richtung durch $\mathfrak{v}$ gegeben sind.

Man rechnet dann nach, daß sich x und x', obwohl verschieden, durch identische Massen und Kräfte zu Modellen der Mechanik ergänzen lassen. Ist nämlich $\langle x,m,f\rangle \in M(\mathrm{MECH})$, so auch $\langle x',m,f\rangle$. Denn $m(p)\ddot{s}'(p,t)=m(p)\ddot{s}(p,t)= \sum_{i=1}^{\infty} f(p,t,i)$ (ÜIII-31). Das zweite Newtonsche Axiom bleibt also erhalten, wenn man in der Kinematik die Ortsfunktion s durch eine Ortsfunktion der Art s' ersetzt. Oder anders: das Newtonsche Axiom ist invariant unter Transformationen, die s in s' überführen.

Wie bei der theoretischen Invarianz können wir auch hier die Transformationen von den relevanten Komponenten auf ganze -nunmehr- partielle Modelle übertragen. Wir erhalten eine

Äquivalenzrelation $\sim_2$ auf M_{pp}(MECH):=M(KIN+s).Von solch einer Äquivalenzrelation sagen wir,sie stifte empirische Invarianz, wenn sich je zwei äquivalente partielle Modelle durch die gleichen theoretischen Terme zu Modellen ergänzen lassen.

<u>DIII-16</u> Sei $\sim_2$ eine Äquivalenzrelation auf M_{pp}.

$\sim_2$ <u>stiftet empirische Invarianz</u> gdw für alle $x,y \in M_{pp}$ und alle $t_1,..,t_n$:

wenn $<x,t_1,..,t_n> \in M$ und $x \sim_2 y$,dann $<y,t_1,..,t_n> \in M$

Unter einer Äquivalenzrelation,die empirische Invarianz stiftet,werden partielle Modelle (empirische Strukturen) äquivalent gesetzt (identifiziert),die sich durch gleiche theoretische Terme "erklären" lassen (zu Modellen ergänzen lassen lassen). Eine Theorie,bei der eine solche Äquivalenzrelation auf M_{pp} gegeben ist,nennen wir <u>empirisch invariant</u>.Bei einer empirisch invarianten Theorie bleibt also die Erklärungsleistung konkreter theoretischer Terme invariant (unverändert) bei Transformationen der nicht-theoretischen Strukturen.

Die obige Transformation (*) für kinematische Systeme mit Ortsfunktion liefert offenbar eine Äquivalenzrelation auf M_{pp}(Mech) und man kann zeigen,daß diese empirische Invarianz stiftet (ÜIII-32).

GÀLILEI-INVARIANZ

Die klassische Mechanik ist Galilei-invariant.Diese Invarianz faßt die Invarianz unter räumlichen Drehungen und Verschiebungen,zeitlichen Translationen und Relativbewegungen mit konstanter Geschwindigkeit zusammen.Transformationen der letzten Art haben wir schon bei der empirischen Invarianz im letzten Abschnitt kennengelernt.Wir wollen sie <u>Galilei-Transformationen im engeren Sinn</u> nennen.Es handelt sich dabei also um Transformationen,bei denen eine Ortsfunktion s überführt wird in eine Ortsfunktion s' mittels der Gleichung

$$s'(p,t)=s(p,t)+\mathcal{V}\,t \quad \text{mit } \mathcal{V} \in \mathbb{R}^3.$$

Den Ursprung räumlicher Drehungen und Verschiebungen haben wir schon diskutiert. Die Invarianz unter Zeit-Translationen kommt genauso zustande.Diese drei Arten von Transformationen stellen also schon Invarianten der der Mechanik zugrundeliegenden Kinematik dar.Speziell mit Modellen der Mechanik ist nur die Galilei-Invarianz im engeren Sinn verbunden.Sie kommt intuitiv dadurch zustande,daß die Ortsfunktion s im zweiten Newtonschen Axiom,dem eigentlichen "dynamischen" Axiome der Mechanik,nur in ihrer zweiten Ableitung $\ddot{s}$ auftritt.Für Ortsfunktionen s und s',die sich nur durch konstante Relativgeschwindigkeit unterscheiden,für die also $\dot{s}=\dot{s}'+\mathfrak{v}$ gilt,oder für die äquivalent gilt

$$s(p,t)=s'(p,t)+\mathfrak{v}\,t+\mathfrak{b}\ ,$$

verschwindet dieser Unterschied in der zweiten Ableitung.Es ist $\ddot{s}=\ddot{s}'$.

Wenn wir räumliche Drehungen und räumliche und zeitliche Verschiebungen als theoretische Invarianzen der Kinematik stiftend voraussetzen,so tritt nur die Galilei-Invarianz im engeren Sinn als "die" empirische Invarianz der Mechanik hinzu.

Die präzise Definition der allgemeinen Galilei-Transformationen lautet wie folgt.

<u>DIII-17</u> Seien $x=\langle R,Z,P;\lessdot,d,i,s\rangle$ und $x'=\langle R',Z',P';\lessdot',d',i',s'\rangle \in M_{pp}(MECH)$.

<u>x' entsteht aus x durch eine Galilei-Transformation mit Parametern $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{v}$ und</u> t_o (in Zeichen: $x \xrightarrow{\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{v}\,t_o} x'$) gdw

1) $\mathfrak{A}$ ist eine orthogonale,reelle 3×3-Matrix,$\mathfrak{v},\mathfrak{b}\in \mathbb{R}^3$, und $t_o\in \mathbb{R}$
2) $R=R'$,$P=P'$,$\lessdot=\lessdot'$ und $d=d'$
3) für alle $p\in P$ und $t\in Z$: $s'(p,t)=\mathfrak{A}s(p,t+t_o)+\mathfrak{v}\,t+\mathfrak{b}$

Der Übergang von s zu s' gemäß Bedingung 3) läßt sich in vier Schritte zerlegen.Erstens geht man von s über zu s_1,wobei s_1 definiert ist durch $s_1(p,t)=s(p,t+t_o)$.Hier ist einfach eine Zeitverschiebung vorgenommen.s_1 beschreibt das System t_o Zeiteinheiten später als s,oder dazu äquivalent: s_1 beschreibt dasselbe System wie s,wobei nur der Zeitnullpunkt um t_o Einheiten "vorverlegt" wurde.Zweitens wird s_1 überführt in $s_2=\mathfrak{A}\, s_1$ (räumliche Drehung).Drittens wird s_2 durch räumliche Verschiebung überführt in $s_3=s_2+\mathfrak{b}$.Auf s_3 wird schließlich eine Galilei-Transformation im engeren Sinn angewandt und man erhält $s'(p,t)=s_3(p,t)+\mathfrak{w}\, t$.

Die klassische Mechanik ist nun Galilei-invariant in folgendem Sinn.Ist y ein Modell der Mechanik und wird der kinematische Teil von y,r(y),durch eine Galilei-Transformation in ein partielles Modell x überführt,so ist auch x,ergänzt um die Massenfunktion von y und die "gedrehte" Kraftfunktion von y,wieder ein Modell der Mechanik.Genauer gilt folgendes Theorem.

<u>TIII-5</u> Ist $y\in M(MECH)$ und $x\in M_{pp}(MECH)$ und gilt

$$r(y)\xrightarrow{\mathfrak{A}\mathfrak{b}\mathfrak{w}t_o}x, \text{so ist } \langle x,m_y,\mathfrak{A}\, f_y\rangle \in M(MECH)$$

Dabei bezeichnet m_y die Massenfunktion m von y und $\mathfrak{A}\, f_y$ die um $\mathfrak{A}$ -dem "Drehparameter" aus der Galilei-Transformation-gedrehte Kraftfunktion f_y von y,also

$$(\mathfrak{A}\, f_y)(p,t,i)=\mathfrak{A}(f_y(p,t,i)).$$

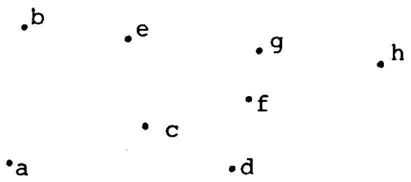
Bei allgemeinen Galilei-Transformationen bleiben weder die theoretischen noch die nicht-theoretischen (empirischen) Komponenten unverändert.Was invariant bleibt,ist lediglich die <u>Form</u> des mechanischen Grundgesetzes,d.h.des zweiten Newtonschen Axioms.Gilt nämlich vor der Transformation $m\ddot{s}=\sum_i f_i$ und bezeichnen wir mit T(s) und T(f) das Resultat einer Galilei-Transformation angewandt auf s und der entsprechenden Drehung, angewandt auf f,so gilt nach der Transformation

$$m(\ddot{\widehat{T(s)}})=\sum_i T(f_i).$$

ÜBUNGEN ZU KAPITEL III

(ÜIII-1): (1) Gib zu Figur 30) (S.183) eine Menge $A\subseteq \{a,\dots,h\}^3$ an,sodaß gilt: $\langle x,y,z\rangle\in A$ gdw y in der Figur zwischen x und z liegt.

Fig.30



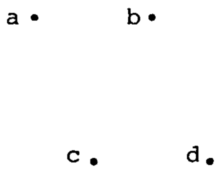
(2) Veranschauliche die Menge $A' \subseteq \{a,..,f\}^3$,A'={<a,b,c>, <a,b,d>,<a,d,c>,<b,d,c>} ähnlich wie in Figur 30),sodaß gilt: <x,y,z> ∈ A' gdw y in der Figur zwischen x und z liegt.

(3) Wie (2) mit A'':=A' ∪ {<a,a,a>,<a,a,b>,<a,a,c>,<a,a,d>, <a,b,b>,<a,c,c>,<a,d,d>,<b,a,a>,<b,b,a>,<b,b,b>,<b,b,c>, <b,b,d>,<b,c,c>,<b,d,d>,<c,a,a>,<c,b,b>,<c,c,a>,<c,c,b>, <c,c,c>,<c,c,d>,<c,d,d>,<d,a,a>,<d,b,b>,<d,c,c>,<d,d,a>, <d,d,b>,<d,d,c>,<d,d,d>}.
Welche Konvention wurde hier für die Zwischenrelation im Unterschied zu (2) getroffen?

(4) Wie (1),jedoch nur mit den Punkten a,b,c,d in Figur 30) und mit der Konvention,daß <u>zw</u>(x,y,z) auch gilt,wenn zwei oder drei der Argumente identisch sind.

(ÜIII-2):

Fig.31



(1) Gib zu Figur 31) eine Menge $A \subseteq \{a,..,d\}^4$ an,sodaß gilt: <x,y,x',y'> ∈ A gdw in der Figur die Strecke $\overline{xy}$ kongruent zur Strecke $\overline{x'y'}$ ist.

(2) Veranschauliche die Menge A'={<a,b,a,b>,<a,b,b,a>, <a,b,b,c>,<a,b,c,b>,<b,a,a,b>,<b,a,b,a>,<b,a,b,c>,<b,a,c,b>, <b,c,b,c>,<b,c,c,b>,<b,c,a,b>,<b,c,b,a>,<c,b,b,c>,<c,b,c,b>,

$\langle c,b,a,b\rangle,\langle c,b,b,a\rangle\} \subseteq \{a,b,c\}^4$,sodaß gilt: $\langle x,y,x',y'\rangle \in A'$ gdw in der Figur die Strecken $\overline{xy}$ und $\overline{x'y'}$ kongruent sind.

(3) Wie (2) mit $A''=A' \cup \{\langle a,a,a,a\rangle,\langle a,a,b,b\rangle,\langle a,a,c,c\rangle, \langle b,b,a,a\rangle,\langle b,b,b,b\rangle,\langle b,b,c,c\rangle,\langle c,c,a,a\rangle,\langle c,c,b,b\rangle,\langle c,c,c,c\rangle\}$. Welche Konvention wurde hier für die Kongruenzrelation im Unterschied zu (2) getroffen?

(4) Wie (1),jedoch mit der Konvention,daß $xy \equiv x'y'$ auch gilt, wenn x mit y und x' mit y' identisch sind oder x mit x' und y mit y'.

(ÜIII-3): (1) Definiere für $a,b \in R, a\neq b$ "die Gerade G(a,b),die durch die Punkte a und b hindurchgeht" als Menge von Raumpunkten so,daß nur die Zwischenrelation <u>zw</u> in der Definition benutzt wird.

(2) Definiere für $a,b,c \in R$ mit $a\neq b\neq c\neq a$: "die Ebene E(a,b,c), in der a,b und c liegen" als Menge von Raumpunkten.(Betrachte die Geraden G(x,y) mit $x\neq y$ und $x,y \in \{a,b,c\}$,sowie alle Geraden, die je zwei der ersten schneiden.)

(3) Formuliere A11),indem außer mengentheoretischen Symbolen nur die Zwischenrelation <u>zw</u> benutzt wird.(Benutze (1) und (2)).

(ÜIII-4): Es sei $R:= \mathbb{R}^4, A:=\{\langle 0,0,0,\alpha^2\rangle/\alpha \in [0,1]\}$, $\mathfrak{a}:=\langle 0,0,0,0\rangle$, $\mathfrak{b}:=\langle 0,0,0,1/2\rangle$, $\mathfrak{c}:=\langle 0,0,0,1\rangle$ und für i=1,..,4 $\mathfrak{a}_i:=\langle \alpha_i^1,\dots,\alpha_i^4\rangle$.Weiter gelte $(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \equiv \mathfrak{a}_3\mathfrak{a}_4$ gdw $\|\mathfrak{a}_1-\mathfrak{a}_2\| = \|\mathfrak{a}_3-\mathfrak{a}_4\|)$,wobei $\|\mathfrak{a}_i-\mathfrak{a}_j\| :=\sqrt{\sum_{k\leq 4} |\alpha_i^k-\alpha_j^k|^2}$ .Zeige:

Es gibt $\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2,\mathfrak{c}_3 \in \mathbb{R}^4$ (paarweise verschieden),sodaß

$$\mathfrak{a}\mathfrak{c}_1 \equiv \mathfrak{a}\mathfrak{c}_2 \equiv \mathfrak{a}\mathfrak{c}_3,\quad \mathfrak{b}\mathfrak{c}_1 \equiv \mathfrak{b}\mathfrak{c}_2 \equiv \mathfrak{b}\mathfrak{c}_3,\quad \mathfrak{c}\mathfrak{c}_1 \equiv \mathfrak{c}\mathfrak{c}_2 \equiv \mathfrak{c}\mathfrak{c}_3.$$

Aber $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}$ sind Elemente von A und A ist keine Gerade in $\mathbb{R}^4$.

(ÜIII-5): (1) Stelle den Inhalt von A2),A3),A6),A7),A9) und A10) unter Benutzung der üblichen Zwischen- und Kongruenzbegriffe zeichnerisch dar.

(2) Gib zu jedem der Axiome in (1) eine Interpretation der Zeichen <u>zw</u> und $\equiv$ an,bei der das Axiom nicht erfüllt ist.(Interpretiere z.B. für A2) <u>zw</u> wie folgt: <u>zw</u>(a,b,c) gelte genau dann,wenn b rechts von der Verbindungsgeraden zwischen a und c

(von a aus gesehen) liegt.)

(ÜIII-6): Es gilt der folgende Satz: Ist $x=\langle R;\underline{zw},\equiv\rangle$ eine euklidische Geometrie und sind $a,b\in R, a\neq b$, so gibt es genau eine Metrik $d:R\times R\to \mathbb{R}$, sodaß für alle $a_1,..,a_4\in R$ gilt:

1) $\underline{zw}(a_1,a_2,a_3)$ gdw $d(a_1,a_2)+d(a_2,a_3)=d(a_1,a_3)$

2) $a_1a_2\equiv a_3a_4$ gdw $d(a_1,a_2)=d(a_3,a_4)$

3) $d(a,b)=1$.

(1) Definiere unter Benutzung einer solchen Metrik für $a,b,c,e\in R, a\neq b$: "c ist der Fußpunkt des Lotes von e auf G(a,b)". (Vergleiche ÜIII-3).
(2) Definiere in $\mathbb{R}^3$ die übliche Zwischenrelation und die euklidische Metrik d und zeige, daß die Koordinatenachsen des $\mathbb{R}^3$ Geraden im Sinn von ÜIII-3 sind.
(3) Zeige, daß die Fußpunkte der Lote von $\mathfrak{a}=\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle\in\mathbb{R}^3$ auf die Koordinatenachsen gerade die Zahlen $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ sind. (Benutze die Metrik von (2)).

(ÜIII-7): Welches der Axiome A1)-A13) ist in einem Zimmer nicht zu erfüllen? Welche Paare der Axiome sind in einem Zimmer nicht zu erfüllen? (Man beachte die Allquantoren am Anfang von DIII-3).)

(ÜIII-8): (1) Beschreibe die durch $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ gegebene 2-stellige Relation $<$ als Teilmenge A von $\{t_1,..,t_n\}^2$. Welche Paare $\langle t_i,t_j\rangle$ sind nicht in A?
(2) Sei $<\,:=\{\langle t_0,t_1\rangle,\langle t_0,t_2\rangle,\langle t_1,t_2\rangle,\langle t_0,t_3\rangle,\langle t_0,t_4\rangle,\langle t_0,t_5\rangle,\langle t_3,t_4\rangle\}\subseteq\{t_0,..,t_5\}^2$. Stelle $<$ graphisch dar. Hat $<$ die Form, die man als "Abfolge von Zeitpunkten" bezeichnen würde?

(ÜIII-9): (1) Man zeige, daß für $\alpha<\beta\in\mathbb{R}$ das offene Intervall $]\alpha,\beta[$ zusammen mit der üblichen Kleinerrelation $<$ die im Text angegebenen Axiome erfüllt.
(2) Wie (1) für das abgeschlossene Intervall $[\alpha,\beta]$.
(3) Definiere auf der Menge $Z:=\{\langle\alpha,\sin(\alpha)\rangle/\alpha\in\,]0,\pi[\}\subseteq\mathbb{R}^2$ eine Relation $\lessdot$, sodaß die im Text gegebenen Axiome für $\langle Z;\lessdot\rangle$ erfüllt sind.

(ÜIII-10): (1) Wie ist die Betragsfunktion $|\,|: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert?

(2) Stelle die Funktion,die die Höhe einer startenden Rakete über der Erdoberfläche in Abhängigkeit von der Zeit erfaßt, zeichnerisch dar.

(3) Stelle die Bewegung eines Pendels in Abhängigkeit von der Zeit zeichnerisch dar durch die Veränderung des Abstandes von der Ruhelage.

(4) Zeichne in (2) und (3) in bestimmten Punkten die Ableitungen der Funktionen ein.Interpretiere sie am Beispiel.

(ÜIII-11): Für $Z^*:=\{t_1,..,t_5\}$ und $R^*:=\{a,b,c\}$ sei $d:Z^* \times R^* \times R^* \to \mathbb{R}_0^+$ wie folgt definiert.

	$d(t_i,a,b)$	$d(t_i,b,c)$
i=1	2	45
i=2	1	15
i=3	2	5
i=4	3	3/2
i=5	3	1/2

und $d(t_i,a,c):=d(t_i,a,b)+d(t_i,b,c)$.

(1) Stelle d zeichnerisch dar.(Trage die Zeitpunkte auf der vertikalen Koordinatenachse auf,zeichne durch jeden Zeitpunkt eine horizontale Achse.Trage auf den horizontalen Achsen jeweils die Punkte a,b,c so auf,daß die Abstände aus der Tabelle gewahrt sind.)

(2) Wie (1),aber so,daß alle Positionen von b auf einer vertikalen Geraden liegen.

(3) Kann man d noch zeichnen,wenn in Abänderung der obigen Definition $d(t_i,a,c)^2:=d(t_i,a,b)^2+d(t_i,b,c)^2$ gelten soll?

(4) Was ist der Unterschied zum allgemeinen Fall einer Funktion Funktion $d:Z \times R \times R \to \mathbb{R}_0^+$?

(ÜIII-12): Es sei $N:=\mathbb{R}^2$ und $d:N \times N \to \mathbb{R}$ definiert durch $d(<\alpha_1,\alpha_2>,<\beta_1,\beta_2>):=\sqrt{(|\alpha_1-\beta_1|^2+|\alpha_2-\beta_2|^2)}$.

(1) Veranschauliche die Definition von d. (Benutze den Satz von Pythagoras.)

(2) Zeige: Für alle $a,b,c \in N$ gilt (i) $d(a,b) \geq 0$,(ii) $d(a,b)=d(b,a)$,(iii) $d(a,b)=0$ gdw $a=b$,(iv) $d(a,c) \leq d(a,b)+d(b,c)$.

(3) Wir sagen,daß für $a,b,c \in N$: c zwischen a und b liegt,wenn es $\alpha \in [0,1]$ gibt,sodaß $c=a+\alpha(b-a)$.Veranschauliche diese Definition.(Vektoraddition.) Zeige: c liegt genau dann zwischen a und b,wenn gilt: $d(a,c)+d(c,b)=d(a,b)$.

(ÜIII-13): Es sei $x=\langle R,Z; \lessdot ,d\rangle$ ein potentielles Modell der klassischen Raum-Zeit-Theorie,$R^* \subset R, Z^* \subset Z$ seien endlich und $\lessdot^* \subseteq Z^* \times Z^*$,$d^*: Z^* \times R^* \times R^* \rightarrow \mathbb{R}_0^+$.

(1) Definiere: $x^*=\langle R^*,Z^*; \lessdot^*,d^*\rangle$ ist in x eingebettet.

(2) Wie (1) aber mit x als Modell.

(3) In ÜIII-11 sei $t_i:=i$ für $i=1,..,5$ und $1<2<\ldots<5$. Läßt sich die Struktur aus ÜIII-11 in ein Modell einbetten?

(ÜIII-14): "Bewegung" heißt im bisherigen Vokabular "Änderung räumlicher Abstände in der Zeit".Zeichne in dem im Text benutzten Bild der übereinanderliegenden Ebenen zwei Raumpunkte, die sich relativ zueinander bewegen.Welche Forderung von DIII-6) ist dann verletzt?

(ÜIII-15): Beweise TIII-1).

(ÜIII-16): Beweise: Jedes Polynom $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Form $f(\alpha)= \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot \alpha^i$ mit $\beta_1,..,\beta_n \in \mathbb{R}$ ist C^∞ . (benutze die bekannten Ableitungsregeln für "+" und "x^n".)

(ÜIII-17): Definiere für $x \in M_p(KIN)$ "das Teilchen p ruht in x". (Benutze die "Bahn" i_p von p.)

(ÜIII-18): (1) Definiere: "x ist eine Gruppe",wobei $x=\langle D,\circ ,e\rangle$ und e das neutrale Element ist. (Benutze ein Lehrbuch der linearen Algebra.)

(2) Wie (1) mit "Ring" statt "Gruppe" und $x=\langle D,\circ ,e,\cdot\rangle$.

(3) Zeige: Die Theorie der Ringe (gegeben durch die Klasse aller Ringe) ist eine Theoretisierung der Theorie der Gruppen.

(4) Definiere am Beispiel von Ringen und Gruppen die im Text angesprochene Theoretisierungsfunktion Θ .
(5) Definiere Θ für den Fall Kinematik und klassische Raum-Zeit-Theorie.

(ÜIII-19): (1) Was muß man beweisen,damit man sinnvoll mit einer Ortsfunktion arbeiten kann? Im Rahmen welcher Theorie sind diese Aussagen formuliert? Lassen sie sich dort allgemein beweisen?
(2) Konstruiere ein potentielles Modell der klassischen Raum-Zeit-Theorie,in dem der Satz des Pythagoras falsch ist. (Wähle R drei-elementig.)

(ÜIII-20): (1) Setze in DIII-10) "2" für "3" und zeichne in einer Ebene (d.h. zu einem Zeitpunkt) ein Koordinatensystem wie in DIII-10) definiert.
(2) Beweise: In DIII-10) ist Bedingung 2) aus 1) ableitbar.

(ÜIII-21): Definiere "G ist eine Gerade durch a und b" in einem potentiellen Modell x der klassischen Raum-Zeit-Theorie. (Vergleiche ÜIII-3.)

(ÜIII-22): (1) Zeichne in einer Ebene ein Dreieck,zwei verschiedene Koordinatensysteme und ermittle graphisch die Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks in beiden Koordinatensystemen.
(2) Zeige: Die beiden Koordinatensysteme K und K' aus (1) lassen sich wie folgt zur Deckung bringen.Man dreht K um seinen Ursprung und verschiebt das Resultat in einer bestimmten Richtung.

(ÜIII-23): Eine orthogonale,reelle 2×2-Matrix ist eine reelle 2×2-Matrix

$$\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}, \alpha_{12} \\ \alpha_{21}, \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

mit $\det(\mathfrak{a})=1$,d.h. $\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}=1$.Die Zahlen α_{ij} heißen Koeffizienten der Matrix.Wir bezeichnen mit $\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle^T$ den aus $\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle$ durch Transponierung entstehenden

Vektor $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$. Für eine Matrix $\mathfrak{A}$ der obigen Form und einen Vektor $\langle\beta_1,\beta_2\rangle \in \mathbb{R}^2$ ist $\mathfrak{A}\langle\beta_1,\beta_2\rangle^T$ definiert als der Vektor $\langle\alpha_{11}\beta_1+\alpha_{12}\beta_2,\alpha_{21}\beta_1+\alpha_{22}\beta_2\rangle$.

(1) Beweise: Für $\|\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle\| := \sqrt{}(\alpha_1^2+\alpha_2^2)$ gilt: Ist $\mathfrak{A}$ eine orthogonale, reelle 2×2-Matrix, so ist für alle $\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle \in \mathbb{R}^2$: $\|\mathfrak{A}\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle^T\| = \|\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle\|$.

(2) Zeige: Jede reelle 2×2-Matrix läßt sich auffassen als Funktion $g:\{1,2\}\times\{1,2\}\to\mathbb{R}$.

(3) Welche orthogonale 2×2-Matrix ergibt, angewandt auf $\langle 1,0\rangle$ den Vektor $\langle 0,1\rangle$? (Benutze Sinus und Cosinus zur Beschreibung der Koeffizienten.)

(4) Zeichne in einem zweidimensionalen Koordinatensystem ein Dreieck. Verschiebe das Dreieck durch Addition der Eckpunkte (die als Vektoren aufgefaßt werden) zu einem beliebig vorgegebenen Vektor.

(5) Stelle zeichnerisch die Wirkung der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle) = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle^T + \langle 2,2\rangle$ dar. ("+" bedeutet hier Vektoraddition.)

(6) Zeichne Drehung und Verschiebung eines Raumpunktes relativ zu einem gegebenen Koordinatensystem im Bild von Figur 23).

(ÜIII-24): Beweise TIII-3b). (Es genügt, sich auf einen Zeitpunkt zu beschränken. Finde ein geeignetes Koordinatensystem K' durch Anwendung der zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{b}$ "inversen Operationen" auf K. Die zu $\mathfrak{A}$ inverse Operation ist $\mathfrak{A}^T$ (vergl. ÜIII-23), die zu $\mathfrak{b}$ ist $-\mathfrak{b}$.)

(ÜIII-25): Es sei N eine Menge und D die Menge aller bijektiven Abbildungen $f:N\to N$. Die Elemente von D heißen <u>Transformationen über</u> N.

(1) Zeige: $\langle D,\circ,e\rangle$ ist eine Gruppe, wobei $(f\circ g):N\to N$ definiert ist durch $(f\circ g)(a):=f(g(a))$ und $e(a):=a$ für alle $a\in N$.

(2) Es sei $\langle D,\circ,e\rangle$ eine Gruppe von Transformationen über N und $\sim\subseteq N\times N$ definiert durch $a\sim b$ gdw (es gibt $f\in D$ mit $f(a)=b$). Zeige: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf N (vergl. ÜI-29).

(3) Für $\mathfrak{a} \in SO_3$ (d.h. "$\mathfrak{a}$ ist eine orthogonale, reelle 3×3-Matrix"), $\mathfrak{b} \in \mathbb{R}^3$ und M^* als Klasse aller klassischen Kinematiken mit Ortsfunktion sei $f_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} : M^* \rightarrow M^*$ definiert durch

$$f_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\langle R,Z,P;\ \prec,d,i,s\rangle) := \langle R,Z,P;\ \prec,d,i,\mathfrak{a}s+\mathfrak{b}\rangle \ .$$

Zeige: $f_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ ist eine Transformation über M^*. Was ist in der Gruppe dieser Transformationen das zu $f_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ inverse Element?
(4) Definiere für die Transformationen in (3) eine Äquivalenzrelation gemäß (2).

(ÜIII-26): $\sim$ stifte theoretische Invarianz auf M_p.
(1) Beweise: Für alle $x \in M_p$: $\tilde{x} \subseteq e(r(x))$.
(2) Die Mengen $\tilde{x}$ mit $x \in e(r(x))$ bilden eine Klasseneinteilung von $e(r(x))$. (Vergleiche ÜI-29).

(ÜIII-27): $\sim$ stifte theoretische Invarianz auf M_p und für Q gelte: wenn $X \in Q$ und $X \sim X'$, dann $X' \in Q$ (wobei $X \sim X'$ bedeute: zu jedem $x' \in X'$ gibt es $x \in X$ mit $x \sim x'$). Zeige: Wenn $I=\bar{r}(X) \wedge X \subseteq M \wedge X \in Q$ und $X \sim X'$, dann $I=\bar{r}(X') \wedge X' \subseteq M \wedge X' \in Q$.

(ÜIII-28): Zeige: Die im Text definierte Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

(ÜIII-29): $x \in M(MECH)$ heiße <u>rein</u>, wenn für $i > 1$ und alle p,t gilt: $f(p,t,i)=0$. Sind x und x' reine Modelle, so heißt y <u>Superposition</u> von x und x', wenn gilt $P_x=P_{x'}=P_y$, $f_1^y=f_1^x$, $f_2^y=f_1^{x'}$ und $f_i^y=0$ für $i > 2$. (Dabei bezeichnen P_y, f^y usw. die in y vorkommenden Partikelmengen und Kraftfunktionen.) Zeige: Jedes Modell der Mechanik läßt sich aus reinen Modellen durch Superposition gewinnen.

(ÜIII-30): Beweise: (1) $\sim_1$ ist eine Äquivalenzrelation auf $M_p(MECH)$.
(2) $\sim_1$ stiftet theoretische Invarianz.

(ÜIII-31): Es sei $\mathfrak{a} \in SO_3$ (vergl. ÜIII-25) und $s: P \times Z \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei C^∞ .

(1) Beweise: $\ddot{\widehat{\mathfrak{A}s}} = \mathfrak{A}\ddot{s}$,d.h.für alle p,t:

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathfrak{A}s(p,t) = \mathfrak{A}\frac{d^2}{dt^2}s(p,t).$$

(2) Für $s'(p,t) = \mathfrak{A}s(p,t) + \mathfrak{v}t + \mathfrak{b}$ gilt nicht $\ddot{s}' = \ddot{s}$.

(ÜIII-32): Auf M_{pp}(MECH) definieren wir eine Relation $\sim$ wie folgt. $\langle R,Z,P;\lessdot,d,i,s\rangle \sim \langle R',Z',P';\lessdot',d',i',s'\rangle$ gdw $\langle R,Z,P;\lessdot,d,i\rangle = \langle R',Z',P';\lessdot',d',i'\rangle$ und es gibt $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{b} \in \mathbb{R}^3$, sodaß für alle p,t: $s(p,t) = s'(p,t) + \mathfrak{v}t + \mathfrak{b}$.

(1) Zeige: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf M_{pp}(MECH).

(2) $\sim$ stiftet in der Mechanik empirische Invarianz.

Kapitel IV Spezielle Relativitätstheorie

Den Anwendungsbereich der speziellen Relativitätstheorie (im folgenden abgekürzt durch SRT) gibt man am besten indirekt unter Bezugnahme auf die klassische Mechanik an,weil dadurch der entscheidende Unterschied zwischen der klassischen und der relativistischen Theorie betont wird.Zwar gibt es mehrere Unterschiede zwischen beiden Theorien,aber intuitiv gehen alle auf einen zurück: die SRT behauptet,daß es eine absolute Höchstgeschwindigkeit -die des Lichts- gibt und daß keine Bewegung oder Signalübertragung oder Wirkung mit größerer Geschwindigkeit möglich ist,während in der klassischen Mechanik Bewegungen mit beliebig hohen Geschwindigkeiten für möglich gehalten werden.Wenn man die SRT in möglichst naher Analogie zur klassischen Mechanik darstellen will,so könnte man sagen,daß die SRT Bewegungen von Teilchen zum Gegenstand hat,die höchstens mit Lichtgeschwindigkeit unterwegs sind und daß diese Bewegungen mittels Massen und Kräften systematisiert und erklärt werden.

Auch der Aufbau der SRT läßt sich dem der klassischen Mechanik analog durchführen.Man kann zunächst mit Hilfe von Raum und Zeit,die beide in der SRT zu einer untrennbaren Einheit,der sogenannten "Raum-Zeit" verschmelzen,eine speziell relativistische Kinematik einführen,in der sich die interessierenden Bewegungen darstellen lassen.Auf der Kinematik läßt sich dann die Dynamik aufbauen;in ihr werden die Bewegungen durch (relativistische) Massen und Kräfte "erklärt".Wir werden hier nicht diesen ganzen Aufbau durchführen,sondern uns mit dem ersten Teil -der Kinematik- begnügen.Ebenso werden wir nur kurz auf die sogenannte "Lorentz-Transformation" eingehen,die in physikalischen Lehrbüchern meist den Ausgangspunkt der Darstellung bildet.Stattdessen wählen wir eine Darstellung,die auf Reichenbach zurückgeht (manchmal auch "Lichtgeometrie" genannt) und die mehr die Struktur der relativistischen Raum-Zeit betont.Diese Darstellung (vergleiche [Reichenbach, 1979]) hat den Vorteil,daß man sich zunächst nur mit einer einzigen Struktur,dem Modell der Raum-Zeit,zu befassen braucht: ist diese Struktur erst einmal klar,so lassen sich die anderen Aspekte der SRT "im Prinzip" ableiten. Es dreht sich also im wesentlichen darum,ein bestimmtes Modell kennen und verstehen zu lernen.

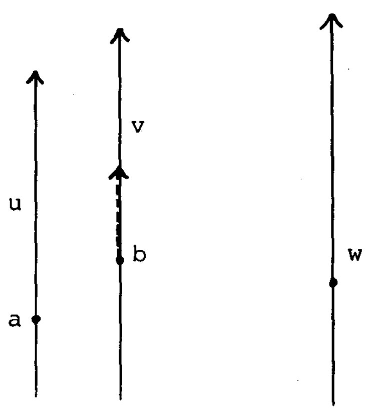
POTENTIELLE MODELLE

Das angesprochene Modell hat vier Dimensionen und vier Dimensionen können wir uns anschaulich nicht mehr vorstellen. Wir behelfen uns wie im Fall der klassischen Kinematik mit einer Verminderung der Dimension,indem wir den Raum (genauer: den räumlichen Anteil der Raum-Zeit) als eindimensional auffassen.Wir nehmen also an,daß der Raum nur eindimensional ist. Das Modell der speziell relativistischen Raum-Zeit läßt sich dann durch eine Zeichnung darstellen und die Verminderung der Dimensionen bewirkt nur einen geringen Informationsverlust.Wir erhalten so eine zweidimensionale Darstellung des uns interessierenden Modells und da uns jenes Modell vermittels des Bildes anschaulich wird,wollen wir uns zunächst völlig auf die zeichnerische Darstellung konzentrieren.

Um aber nicht ganz abstrakt zu bleiben,sei ein reales,angenähertes Modell angegeben,welches durch die Zeichnung schematisch dargestellt wird.Wir stellen uns eine Menge von Raumstationen im All vor,wie sie in Science-Fiction Filmen zu sehen sind.Die Raumstationen sollen sich relativ zueinander nicht bewegen.Zwischen den Stationen werden Signale hin- und hergeschickt,etwa durch Funk,Licht und auch durch kleine Raumschiffe.Eine zeichnerische Erfassung dieser Szene enthält zwei Komponenten: die Bahnen der Raumstationen und die Bahnen der Signale.

Intuitiv stellt man sich "Bahnen" räumlich vor, z.B. als Spuren in einem Medium (die Spur eines Fahrrades, mit dem man am Strand entlangfährt) oder als Schienen einer Modelleisenbahn. Bei dieser Vorstellung ist das, was sich beim Durchlaufen der Bahn ändert, der Ort. Wenn ein Gegenstand die Bahn durchläuft, dann ändert sich dabei ständig sein Ort (und sonst nicht nichts). Diese Vorstellung von Bahnen ist für uns aber nur in begrenztem Maße hilfreich, teilsweise ist sie für die Bahnen der SRT sogar falsch. Denn wenn ein Gegenstand eine Bahn in der SRT entlangläuft, so ändert sich dabei nicht sein Ort. Das einzige, was sich ändert, ist die Zeit. (Auch dies ist nicht ganz richtig, aber zum besseren Verständnis scheint es hilfreich.) Dem Durchlaufen der Bahn entspricht also keine Ortsveränderung, sondern ein "Vergehen" der Zeit. Ein Gegenstand, den wir an verschiedenen Stellen seiner Bahn betrachten, ist stets der gleiche Gegenstand am gleichen Ort (relativ zu anderen, ihn umgebenden Gegenständen), nur zu verschiedenen Zeiten. Wenn der Gegenstand ein Lebewesen wäre, könnte man das Durchlaufen der Bahn am Alterungsprozeß ablesen. Bei nicht-lebendigen Gegenständen stellt man sich am besten vor, daß eine Uhr an ihnen festgemacht ist, die ständig läuft. Daß der Gegenstand eine speziell-relativistische "Bahn" durchläuft, heißt dann nichts anderes, als daß die Zeit ständig vergeht (die Uhr ständig weiterläuft). Betrachten wir nun Figur 32).

Fig.32



Die vertikalen Geraden in Figur 32) stellen die Bahnen der

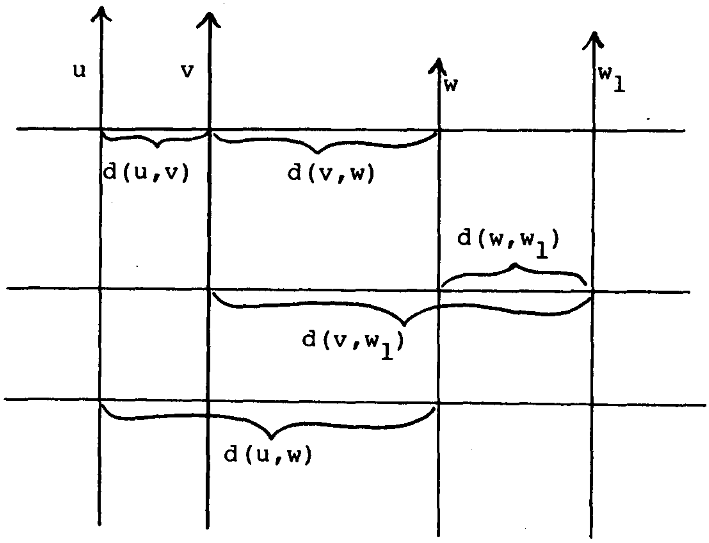
Raumstationen dar.In einem bestimmten Moment befinden sich die Stationen z.B. dort,wo die Punkte eingezeichnet sind.Mit der Zeit rücken die Punkte nach oben,etwa b entlang der punktierten Linie.Anders gesagt: das Durchlaufen der Bahnen deutet darauf hin,daß die Zeit vergeht und umgekehrt,bei vergehender Zeit durchlaufen die Stationen ihre Bahnen.

Wir sagten oben,die Raumstationen sollten sich nicht relativ zueinander bewegen.Das heißt,ihre Abstände bleiben stets dieselben.Dies überträgt sich auch auf die Bahnen.Auf zwei Bahnen u,v haben je zwei sich zeitlich entsprechende Punkte (d.h. Punkte,die demselben Zeitpunkt entsprechen) den gleichen Abstand.Damit ist genauer folgendes gemeint.Sind a,b,c,d Punkte und liegen a,b auf der Bahn u und c,d auf der Bahn v und sind a,c "gleichzeitig" und b,d "gleichzeitig",so ist der Abstand zwischen a und c genauso groß wie der zwischen b und d.Hierbei ist jedoch nicht klar,was mit "gleichzeitig" gemeint ist.Denn da das Durchlaufen einer Bahn (im Bild nach oben) das Vergehen der Zeit (das Vorrücken des Uhrzeigers) <u>an dem</u> Objekt ausdrückt,das die Bahn durchläuft,wissen wir zunächst nicht,wie wir zwei verschiedene Objekte,die verschiedene Bahnen haben,zeitlich vergleichen sollen.Wenn an beiden Objekten Uhren festgemacht sind,so wissen wir nicht,ob beide Uhren an bestimmten Punkten der Bahnen die gleiche Zeit angeben.Selbst wenn in Figur 32) die Stationen,die sich entlang u und v bewegen,mit Uhren ausgerüstet sind,können wir in Figur 32) nicht ohne weiteres herausfinden,ob diese Uhren dann,wenn sich die Stationen an den in Figur 32) markierten Stellen a,b der Bahnen befinden,die gleiche Zeit anzeigen.Entweder wir sitzen auf u.Dann können wir die Uhr auf v nicht ablesen,weil v weit von u entfernt ist (z.B. zwei Lichtjahre).Wir können nur von u z.B. einen Funkspruch absenden an v mit der Bitte, sofort nach Ankunft dieses Funkspruchs die auf v angezeigte Zeit zurückzufunken.Aber der Funkspruch kommt erst zwei Jahre später bei v an.Wie soll man unter diesen Umständen herausfinden,ob sich die Stationen auf u und v gleichzeitig in den Punkten a und b befinden?

Die Frage nach der Gleichzeitigkeit zweier räumlich entfernter Ereignisse (z.B. auf zwei Raumstationen) bildete einen

Ausgangspunkt bei der historischen Entwicklung derSRT.Wir können diese Frage hier noch nicht völlig zufriedenstellend klären.Zunächst möchten wir ja bloß über (räumliche) Abstände reden können.Da dies für die einzelnen Punkte auf den Bahnen zu den gerade diskutierten Problemen führt,beschränken wir uns einfach darauf,nur über Abstände ganzer Bahnen zu reden.Unter der Voraussetzung,daß alle Raumstationen stets gleiche Abstände haben,scheint es sinnvoll,von den Abständen ihrer Bahnen zu reden.Wenn wir so etwas wie den räumlichen Abstand zweier Bahnen festlegen können,dann ist damit auch der räumliche Abstand von Punkten auf diesen Bahnen festgelegt: er ist nämlich gleich dem Abstand der Bahnen und zwar unabhängig davon,ob die Punkte nun "gleichzeitig" sind oder nicht.Den Abstand der Bahnen legen wir zunächst bildlich -etwas brutal- fest als den horizontalen Abstand der Geraden in Figur 32) (eine bessere Erklärung folgt noch). In Figur 33) sind einige Bahnen und deren Abstände eingezeichnet.

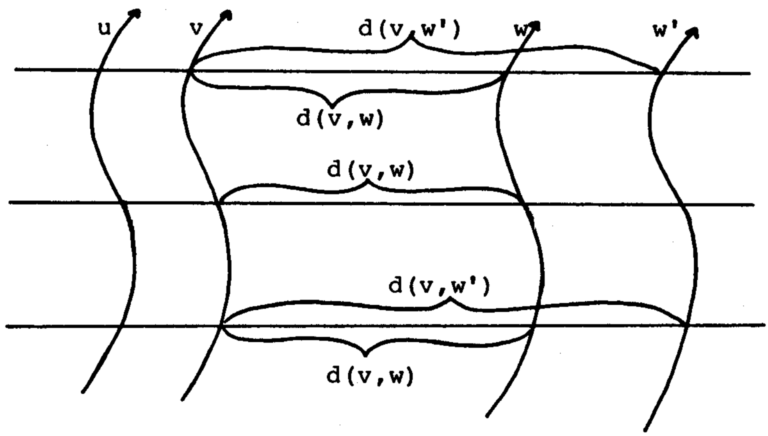
Fig.33



Auf welcher Höhe die horizontalen Linien eingezeichnet sind, ist egal.Die Abstände der vertikalen Geraden sind überall gleich.Natürlich folgt daraus alleine noch nicht,daß die

Bahnen Geraden sind.Ebenso gut könnte der in Figur 34) dargestellte Fall vorliegen.

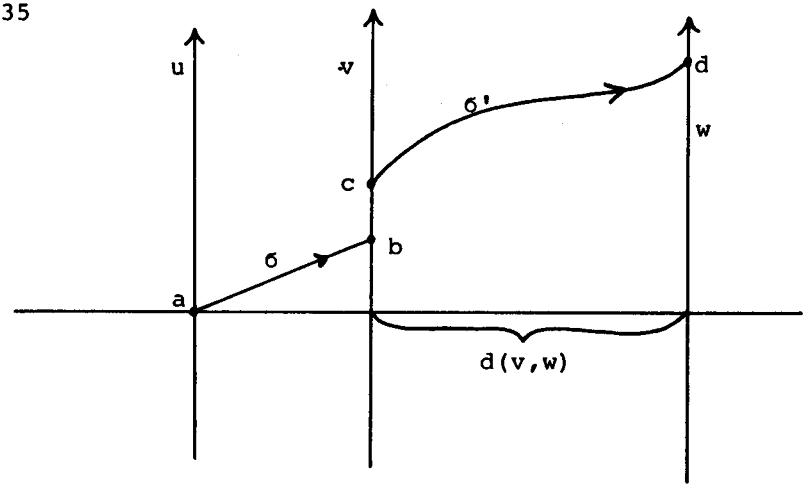
Fig.34



Auch in Figur 34) bleiben die Abstände der Bahnen stets gleich.Wir werden nur aus Einfachheitsgründen die Bahnen der Stationen im folgenden als Geraden zeichnen.

Neben den Bahnen der Stationen war in unserer anfänglichen Beschreibung noch von Bahnen von Signalen die Rede.In Figur 35) sind einige Signalbahnen eingezeichnet.Die Punkte a,b,c,d

Fig.35



sind vorzustellen als Zeigerstellungen von Uhren, die auf den Raumstationen auf den Bahnen u,v,w laufen, d.h. als "Zeitpunkte". σ ist etwa die Bahn eines Funksignals, das von Station u bei a in Richtung auf Station v abgesandt wird. Da beide Stationen weit auseinander sind (z.B. zwei Lichtjahre), braucht das Signal längere Zeit (zwei Jahre), bis es in v bei b ankommt. Die Bahn, die es in dieser Zeit durchläuft, ist gerade σ . σ' ist etwa die Bahn eines Raumschiffs, das von u nach w fährt. Es ändert während der Fahrt seine Geschwindigkeit, sodaß seine Bahn keine Gerade ist.

Wir haben also zwei Arten von Bahnen: die Geraden der relativ zueinander unbewegten "Raumpunkte" (der Raumstationen) und die eventuell krummen Bahnen der Signale. Anders als bei den Bahnen der Raumstationen beinhalten die Signalbahnen auch Ortsveränderungen (und nicht *nur* Änderungen der Zeit). Beim Durchlaufen der Bahn σ' ändert das Signal (das Raumschiff) seinen Ort: es fährt von v nach w und überwindet dabei den räumlichen Abstand d(v,w). Dabei vergeht aber auch Zeit, was man in Figur 35) daran sieht, daß d oberhalb von c liegt (ÜIV-1).

Stellen wir uns die Bahnen als Spuren in einem Medium vor, die von konkreten Objekten oder Dingen verursacht sind, so fragt sich, was das Medium ist, in dem diese Spuren "eingeprägt" werden. Im Fall der SRT ist das Medium sehr abstrakt: eine Menge sogenannter *Ereignisse*. Ereignisse sind z.B. das Aussenden oder Empfangen eines Signals, das "sich kreuzen" zweier Signale oder Gegenstände (im letzten Fall stoßen die Gegenstände einfach zusammen). Auch verschiedene Stellungen eines Körpers auf seiner Bahn kann man als Ereignisse ansehen, sofern diese Stellungen irgendwie von anderen Stellungen unterscheidbar sind. Eine ganz einfache Methode der Unterscheidung besteht darin, an den Körper eine Uhr anzubringen. Die verschiedenen Zeiten (Zeigerstellungen) markieren dann Ereignisse, nämlich verschiedene "Positionen" des Körpers auf seiner Bahn. Aber die genannten Vorgänge und Stellungen sind nicht nur Ereignisse, wenn sie wirklich stattfinden oder eingenommen werden: auch *mögliche* Vorgänge und Stellungen liefern Ereignisse. Denn sonst kämen wir niemals zu einer kontinuierlich dicht ausgefüllten Menge, die als "Medium" dienen kann. Bei Beschränkung auf reale

Vorgänge erhielten wir nur endlich viele diskrete Bahnen im "Leeren".Es wäre fraglich,ob dann der Begriff der Bahn noch einen Sinn machen würde.

In Figur 32) bis 35) sind die Ereignisse einfach die Punkte auf dem Papier.Wenn wir eine Menge von Ereignissen gegeben haben,so lassen sich Bahnen als Mengen von Ereignissen charakterisieren.Die Bahn von u etwa ist gerade die Menge aller Positionen (=Ereignisse),die u zu verschiedenen Zeiten eingenommen hat.Um allerdings verschiedene Bahnen voneinander unterscheiden zu können,müssen wir über die Dinge reden,deren Bahnen wir meinen,etwa die Raumstationen im Beispiel.Bisher haben wir nicht sauber zwischen Dingen (Raumstationen) und Bahnen unterschieden und beide gelegentlich mit u oder v bezeichnet.Nunmehr treffen wir zum Sprachgebrauch eine bindende Vereinbarung.Zu jedem Ding u gehören in eindeutig bestimmter Weise all die Ereignisse,in die das Ding selbst unmittelbar verwickelt ist,wie z.B. Ankunft und Absendung von Signalen, Zusammenstoß mit anderen Dingen,Veränderungen des Dinges selbst (z.B. Ablauf einer Uhr). Wir sagen,das Ding sei in diese Ereignisse unmittelbar <u>einbezogen</u>.Ist e ein Ereignis und u unmittelbar in e einbezogen,so schreiben wir

$$e \in u.$$

Mit Hilfe von Dingen und Ereignissen lassen sich Bahnen wie folgt definieren.Die Bahn eines Dinges u ist einfach die Menge aller Ereignisse,in die u direkt einbezogen ist,also

$$\{e/e \in u\}.$$

Man könnte daher auch "$e \in u$" lesen als "Ereignis e liegt auf der Bahn von u".Wir werden aber künftig nur noch über Dinge und Ereignisse reden und können das Wort "Bahn" ganz vermeiden.Es wird nur noch bei anschaulichen Erläuterungen vorkommen.

Auch die Bahnen von Signalen kann man als Ereignismengen darstellen.Bei den Signalen interessieren uns jedoch nicht so sehr deren tatsächliche Bahnen,als vielmehr die Möglichkeit, zwei Ereignisse mittels eines Signals miteinander zu verbinden (man spricht auch von der "Möglichkeit kausaler Beeinflussung").Nicht für alle Paare von Ereignissen ist dies möglich. Zum Beispiel ist es nicht möglich,beim Ereignis "erste Mondlandung" ein Signal abzuschicken,welches beim Ereignis "Friedensschluß in Versailles zu Ende des ersten Weltkriegs" ankommt;einfach weil wir keine Signale in die Vergangenheit schicken können.Ein Signal in umgekehrter Richtung -vom Friedensschluß zur Mondlandung- wäre mindestens möglich gewesen.Die versammelten Herren hätten z.B. einen versiegelten Brief schreiben können,der später mit der Rakete mitkam und dann auf dem Mond geöffnet und gelesen wurde.Aber es gibt auch Ereignispaare,die durch überhaupt keine Signale miteinander verbunden werden können.Gibt es z.B.in einer viele Lichtjahre entfernten Galaxie Lebewesen,wird gerade jetzt dort ein Baby geboren und dauert die Geburt etwa eine Stunde,so kann dies Ereignis nicht mit irgendeiner Geburt auf der Erde gerade jetzt durch Signale verbunden werden.Es ist nach der SRT unmöglich,daß die beiden betroffenen Väter z.B. sich beglückwünschen,während die Ereignisse stattfinden.Denn die Information vom jeweils anderen freudigen Ereignis dauert mindestens mehrere Jahre und ein Glückwunschtelegramm braucht genauso lange zurück,sodaß bei Eintreffen des Glückwunsches das "Ereignis",um das es geht,schon Jahre zurückliegt.

Wir interessieren uns unter allen Ereignissen speziell für die Paare <e,e'>,für die ein Signal von e nach e' möglich ist. Meist kann ein solches Signal auf vielen verschiedenen Bahnen von e nach e' gelangen.Gibt es mindestens eine Bahn für ein Signal von e nach e',so schreiben wir

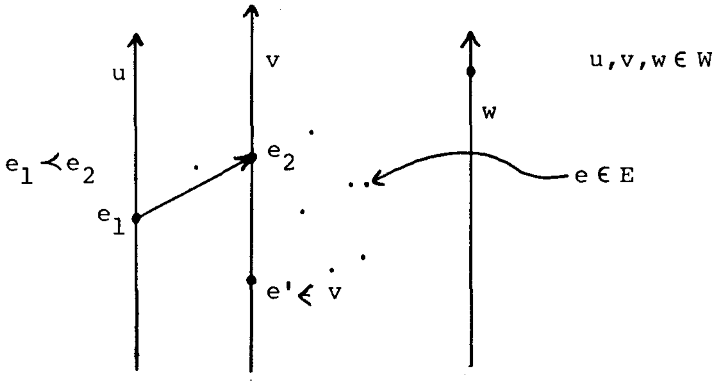
$$e \prec e'.$$

"$e \prec e'$ " ist also eine Abkürzung für die Aussage,daß es möglich ist,ein Signal von e nach e' zu schicken.Man sagt dann auch,e' sei durch e kausal beeinflussbar.Da für das Verständnis von $e \prec e'$ die einzelnen möglichen Bahnen,auf denen das Signal von e nach e' gelangen könnte,nicht relevant sind, brauchen wir auch im folgenden bei den Signalen nicht mehr über Bahnen zu reden.

Wir haben damit zur sprachlichen Darstellung des Modells von Figur 36) vier Grundbegriffe eingeführt: eine Menge von

Ereignissen (bezeichnet mit E) ,eine Menge von Dingen (W), eine Relation $\preccurlyeq$ zwischen Ereignissen und Dingen und eine Relation $\prec$ zwischen Ereignissen.

Fig.36



E entspricht in Figur 36) der Menge aller Punkte auf dem Papier und W der Menge der Dinge,die die verschiedenen Bahnen in E "erzeugen". "e $\preccurlyeq$ u" bedeutet,daß das Ding u direkt in das Ereignis e einbezogen ist,oder anders,daß e auf der von u durchlaufenen Bahn liegt.e $\prec$ e' besagt,daß von e ein Signal nach e' geschickt werden kann.Dies sind auch schon alle Grundbegriffe,die man zum Aufbau der speziell relativistischen Raum-Zeit braucht.

Um die potentiellen Modelle einführen zu können,benötigen wir noch einen Hilfsbegriff: den des Infimums bzw. Supremums einer Menge unter einer Halbordnung.Die hierbei in Frage stehende Halbordnung ist die Relation $\prec$,die oben angesprochen wurde und die die kausale Beeinflussbarkeit ausdrückt.Unter einer Halbordnung versteht man allgemein eine 2-stellige Relation ,die antireflexiv und transitiv ist.Für $\prec$ bedeutet das: für alle Ereignisse e,e',e'' gilt: (wenn e $\prec$ e',dann nicht e' $\prec$ e) und (wenn e $\prec$ e' und e' $\prec$ e'',dann e $\prec$ e'').Es ist klar, daß $\prec$ bei unserer Interpretation diese Eigenschaften hat.Wir können,wie schon mehrfach vorher,eine 2-stellige Relation zwischen Objekten der Menge E auffassen als Teilmenge des kartesischen Produktes $E \times E$,also $\prec \subseteq E \times E$.Für eine beliebige

Teilmenge $X \subseteq E$ werden nun $\inf_{\prec} X$ und $\sup_{\prec} X$ (das Infimum bzw. Supremum der Menge X unter $\prec$) definiert.Dabei ist $e \preccurlyeq e'$ eine reine Abkürzung (DIV-1a).

<u>DIV-1</u> Sei E eine Menge, $X \subseteq E$, $\prec \subseteq E \times E$ und $e, e' \in E$.

a) $e \preccurlyeq e'$ gdw $e \prec e'$ oder $e = e'$

b) e heißt <u>obere</u> (bzw. <u>untere</u>) <u>Schranke von</u> X <u>bezüglich</u> $\prec$ (oder einfach <u>obere</u> (<u>untere</u>) <u>Schranke von</u> X) gdw für alle $e_1 \in X$: $e_1 \preccurlyeq e$ (bzw. $e \preccurlyeq e_1$)

c) $e = \inf_{\prec} X$ gdw e eine untere Schranke von X ist und für alle unteren Schranken e_2 von X gilt: $e_2 \preccurlyeq e$

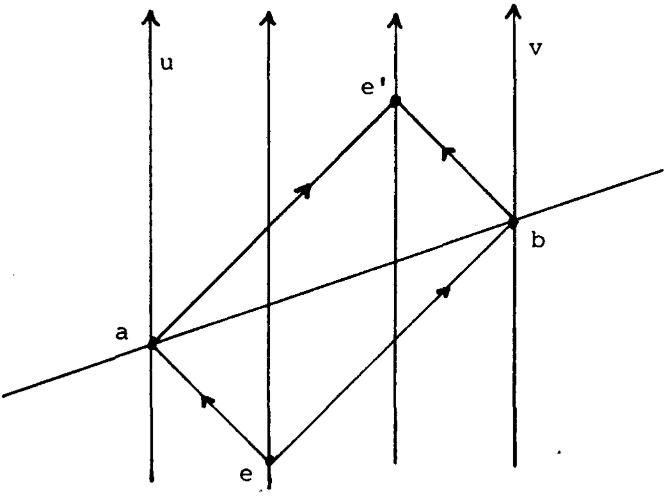
d) $e = \sup_{\prec} X$ gdw e eine obere Schranke von X ist und für alle oberen Schranken e_2 von X gilt: $e \preccurlyeq e_2$

e) $e \rightsquigarrow e'$ gdw es $a, b \in E$ gibt,sodaß: (nicht $a \prec b$) und (nicht $b \prec a$) und $a \neq b$ und $e \prec a \prec e'$ und $e \prec b \prec e'$

f) X heißt <u>beschränkt</u> gdw es eine obere und eine untere Schranke von X gibt

Die definierenden Bedingungen in c) und d) drücken aus,daß e die größte untere bzw.die kleinste obere Schranke von X ist. Die Ausdrücke "größte" und "kleinste" beziehen sich hierbei auf die $\preccurlyeq$ -Relation,die man sich wie eine "kleiner oder gleich"-Relation vorstellt (ÜIV-2).Definition 1e) ist eine Abkürzung,die aber im Fall unserer speziellen $\prec$ -Relation sinnvoll interpretiert werden kann.e und e' sind zwei Ereignisse und $e \rightsquigarrow e'$ bedeutet,daß man von e nach e' Signale auf mindestens zwei verschiedenen Bahnen schicken kann,nämlich über die Ereignisse a und b.Daß die Bahnen über a und b verschieden sind,folgt aus den an a und b gestellten Bedingungen: a und b sollen sich nicht kausal beeinflussen können.Im graphischen Modell liegt dann die Situation in Figur 37) vor. Nach den früheren Erläuterungen kann (nicht $a \prec b$) und (nicht $b \prec a$) nur gelten,wenn a und b räumlich auseinander liegen.Selbst das schnellste Signal (z.B. ein Lichtstrahl) kann, wenn es bei a von u abgeht,in v erst später als b eintreffen und umgekehrt.Das kommt in Figur 37) dadurch zum Ausdruck,daß alle Signalbahnen stets eine Steigung "nach oben" aufweisen.

Fig.37



Sie werden an keinem Punkt horizontal und nur in diesem Fall könnten a und b mit Signalen verbunden werden.Wenn man aber von e nach e' auf verschiedenen Bahnen kommen kann,dann folgt, daß man von e nach e' auch mit einem Signal kommen kann,das nicht maximal schnell ist.Dies ist der eigentliche Inhalt,den DIV-1e) später in Modellen hat.

Zunächst wollen wir aber die potentiellen Modelle der speziell relativistischen Raum-Zeit-Theorie (SRZ) einführen.

DIV-2 x ist ein <u>potentielles Modell der speziell relativistischen Raum-Zeit-Theorie</u> (in Zeichen: $x \in M_p(SRZ)$) gdw es $E, W, \lessdot$ und $\prec$ gibt,sodaß $x = \langle E, W; \lessdot, \prec \rangle$ und es gilt:

1) E und W sind nicht-leere Mengen (von Ereignissen und Gegenständen)
2) $\lessdot \subseteq E \times W$
3) $\prec \subseteq E \times E$
4) für alle $a,b,c \in E$: (wenn $a \prec b$,dann nicht $b \prec a$) und (wenn $a \prec b$ und $b \prec c$,dann $a \prec c$)
5) für alle $e \in E$ gibt es $u \in W$,sodaß $e \lessdot u$
6) für alle $u \in W$ gibt es $e \in E$,sodaß $e \lessdot u$

7) für alle $u,v \in W$: wenn es e gibt mit $e \lessdot u$ und $e \lessdot v$, dann ist $u=v$

8) für alle $u \in W$ und alle $X \subseteq \{e/e \lessdot u\}$: wenn X bezüglich $\prec$ beschränkt ist,dann gibt es e_1,e_2 mit $e_1=\inf_{\prec} X$,$e_2=\sup_{\prec} X$,$e_1 \lessdot u$ und $e_2 \lessdot u$

9) für alle $u \in W$ und alle e,e': wenn $e \lessdot u$ und $e' \lessdot u$,dann ($e=e'$ oder $e \rightsquigarrow e'$ oder $e' \rightsquigarrow e$)

10) für alle $u \in W$ und $e \in E$ gibt es $e_1,e_2 \lessdot u$,sodaß $e_1 \prec e$ und $e \prec e_2$

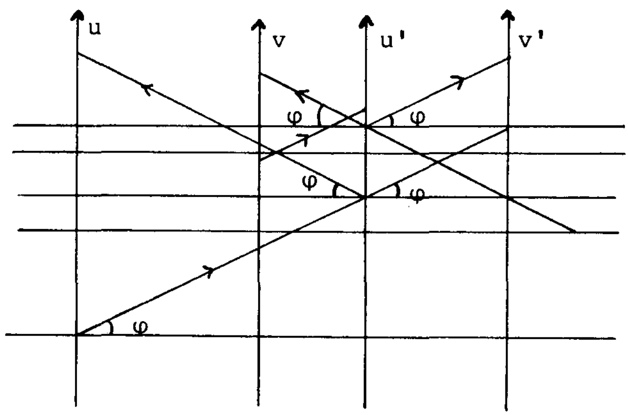
Bedingung 4) besagt,daß $\prec$ eine Halbordnung im früher erklärten Sinn ist.5)-7) besagen,daß die Gegenstände,wenn man sie mittels der Gleichung $u=\{e \in E/e \lessdot u\}$ mit Ereignismengen identifiziert,die Menge aller Ereignisse disjunkt zerlegen (ÜIV-3). Nach 8) hat jede beschränkte Menge X von Ereignissen,in die alle ein Gegenstand u einbezogen ist ($X \subseteq \{e/e \lessdot u\}$),Supremum und Infimum und u ist auch in letztere einbezogen (ÜIV-4),was sich,wenn nicht axiomatisch gefordert,nicht beweisen läßt.Nach 9) sind je zwei Ereignisse,in die der gleiche Gegenstand u einbezogen ist,durch "langsame" Signale,d.h. solche,die langsamer als Licht sind,miteinander verbindbar.10) fordert,daß die Bahnen in Richtung Vergangenheit und Zukunft "offen" sind. Das heißt,auf einer Bahn gibt es kein erstes (bezüglich $\prec$) und kein letztes Ereignis (ÜIV-4-(3)).

DEFINITIONEN UND FOLGERUNGEN

Um die Struktur der potentiellen Modelle besser zu verstehen,wollen wir einige Folgerungen und Definitionen betrachten,die auch später noch gebraucht werden.Zuvor werde jedoch der Bezug zwischen potentiellen Modellen,wie in DIV-2) beschrieben,und unseren früheren bildlichen Modellen hergestellt.

Gehen wir von einem potentiellen Modell $x=\langle E,W;\lessdot,\prec\rangle$ aus, so läßt sich dieses wie folgt in eine Figur der Art von Figur 35) umsetzen.E wird dargestellt als die Menge aller Punkte auf dem Papier.Die Elemente von W -Gegenstände- lassen sich nicht direkt erfassen,sondern nur über die Bahnen,die sie durchlaufen.Wenn wir zu diesem Zweck annehmen,daß jedem Gegenstand genau eine Bahn entspricht,dann ist W in der Figur durch eine Menge von vertikalen Geraden dargestellt: die Bahnen der Gegenstände. "e $\prec$ u" bedeutet,daß der Punkt e in der Figur auf der u entsprechenden Bahn (Geraden) liegt.Zur Veranschaulichung der $\prec$ -Relation müssen wir eine Bemerkung über die Lichtgeschwindigkeit vorausschicken.Wir haben vereinbart, daß räumliche Abstände einfach durch horizontale Abstände zwischen den Bahnen gegeben sind.Zeitliche Abstände können wir -unter gewissen Vorbehalten- mit Abständen zwischen Punkten auf den vertikalen Geraden identifizieren.Geschwindigkeit wird üblicherweise definiert als "Weg durch Zeit": $\Delta s/\Delta t$,wobei Δs ein zurückgelegter Weg (also ein räumlicher Abstand) und Δt eine vergangene Zeit (also ein zeitlicher Abstand) ist.Unter diesen Bedingungen ist aber die Geschwindigkeit eines Signals im Bild gegeben durch die Steigung der Bahn des Signals (ÜIV-5).Je steiler die Bahn,desto langsamer das Signal,d.h.desto kleiner die Geschwindigkeit.Nun soll die Lichtgeschwindigkeit endlich und auch die schnellste Signalgeschwindigkeit überhaupt sein.Außerdem nehmen wir an,daß sie konstant ist.Die Bahnen von Lichtsignalen sind dann Geraden mit stets gleicher Steigung (siehe Figur 38).

Fig.38



Da es keine schnelleren Signale gibt,müssen alle Signalbahnen mindestens die Steigung der "Lichtgeraden" haben (ÜIV-6).

Wählen wir etwa -willkürlich!- die Steigung der Lichtgeraden als 1 (d.h. der Winkel φ in Figur 38) ist 45^{o}),so müssen auch alle anderen Signalbahnen mindestens diese Steigung aufweisen.Erinnern wir uns nun daran,daß $e \prec e'$ zu lesen ist als "von e kann man ein Signal nach e' schicken",so bedeutet $e \prec e'$ im Bild,daß e' oberhalb von e und zwar in einer Fläche F liegt,deren Begrenzungsgeraden Bahnen von Lichtsignalen sind (Figur 39).(ÜIV-7).Betrachtet man die gleiche Situation "von e' aus",so muß e in einer ähnlichen Fläche F' unterhalb von e' liegen (Figur 40).

Fig.39

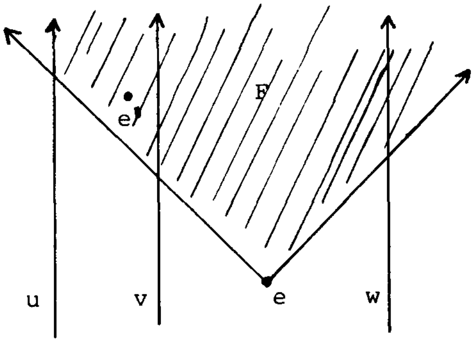
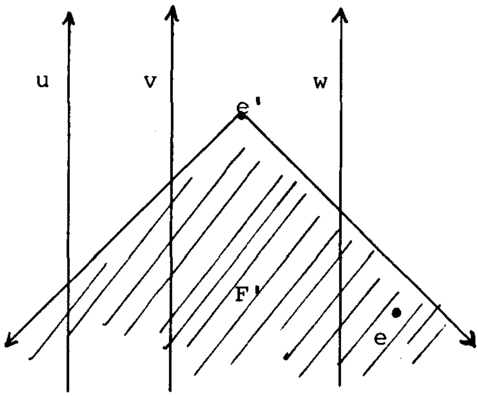


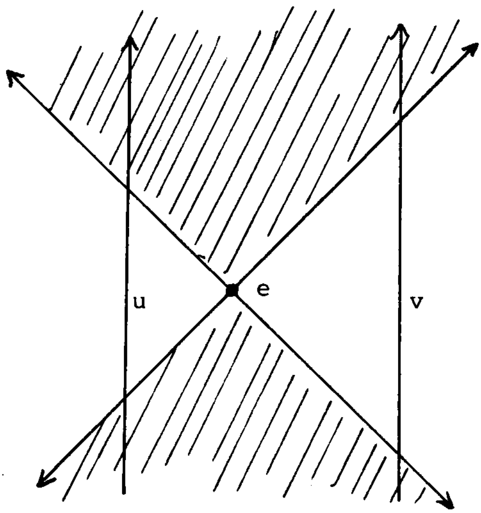
Fig.40



Die $\prec$-Relation wird nun meist im Bild so dargestellt,daß man ein Ereignis,z.B. e ,festhält und alle zu e in der $\prec$-Relation stehenden Ereignisse e',d.h.alle e' mit $e \prec e'$ oder $e' \prec e$, kenntlich macht.Die Menge dieser e' setzt sich aus den beiden

Flächen F und F' (beide von e ausgehend) zusammen (Figur 41).

Fig.41



Die in Figur 41) schraffierte Fläche heißt Lichtkegel (von e). Die $\prec$-Relation ist nun im Bild durch alle Lichtkegel (zu beliebigem e) gegeben.Da die Zeichnung bei mehreren Lichtkegeln unübersichtlich wird,zeichnet man gewöhnlich nur einen an. Damit ist der Übergang von DIV-2) zum bildlichen Modell klar.

Umgekehrt läßt sich aber auch aus einer Figur der Art von Figur 41) ein potentielles Modell gewinnen.Man definiert E als die Menge aller Punkte auf dem Papier,W als Menge aller vertikalen Geraden.e $\lessdot$ u soll genau dann gelten,wenn e auf der Geraden u liegt und e $\prec$ e',wenn e' im "oberen" Lichtkegel von e (den man auch den "Vorwärtskegel" nennt,weil er in Richtung "Zukunft" weist).(ÜIV-8).Man erhält damit ein potentielles Modell.

Aus DIV-1) und DIV-2) ziehen wir nun einige Folgerungen.

TIV-1 Sei $x = \langle E, W; \lessdot, \prec \rangle \in M_p(SRZ)$, $u \in W$ und $e \in E$.

a) $e \preccurlyeq \inf_{\prec} \{x/x \lessdot u \text{ und } e \prec x\}$

b) $\sup_{\prec} \{x/x \lessdot u \text{ und } x \prec e\} \preccurlyeq e$

c) Ist $X \subseteq \{x \in E/x \lessdot u\}$ beschränkt bezüglich $\prec$, so sind $\inf_{\prec} X$ und $\sup_{\prec} X$ eindeutig bestimmt.

Zum Beweis: a) und b) ergeben sich in bekannter Weise aus den Definitionen von Supremum und Infimum. Aussage c), die sich für vollständige Ordnungen allgemein beweisen läßt, benutzt hier wesentlich DIV-2-8), wonach u in $\sup_{\prec} X$ und $\inf_{\prec} X$ einbezogen ist und DIV-2-9), wonach die Menge $\{x/x \lessdot u\}$ durch $\rightsquigarrow$ vollständig geordnet ist (ÜIV-9).

Es wurde schon weiter oben angesprochen, daß man die Gegenstände in W mit ihren Bahnen identifizieren kann. Dies läßt sich wie folgt präzisieren. Zu einem Gegenstand u betrachten wir die Ereignismenge $\hat{u}$.

<u>DIV-3</u> Für $x \in M_p(SRZ)$ und $u \in W$ sei $\hat{u} := \{x \in E/x \lessdot u\}$

In der bildlichen Darstellung ist $\hat{u}$ die Bahn, die u durchläuft. Wir können daher u oder $\hat{u}$ benutzen, je nachdem welche Wahl gerade suggestiver ist. Wollen wir betonen, daß wir von Gegenständen reden, so benutzen wir u. Wollen wir uns auf die Bahn beziehen, reden wir über $\hat{u}$. Die Bahnen $\hat{u}$ nennt man auch <u>Weltlinien</u>. Die enge Beziehung zwischen u und $\hat{u}$ sei nochmals in Form eines Satzes festgestellt.

<u>TIV-2</u> Sei $x \in M_p(SRZ)$, $u \in W$ und $e \in E$.

a) $e \lessdot u$ gdw $e \in \hat{u}$

b) Die Mengen $\hat{u} \subseteq E$ bilden eine Zerlegung von E (ÜIV-3)

Bei Identifikation von u und $\hat{u}$ geht nach a) die Relation $\lessdot$ über in die mengentheoretische Elementschaftsbeziehung $\in$.

Wir definieren nun in potentiellen Modellen zu vorgegebenen Bahnen $\hat{u}$ Funktionen f_u und g_u, die Ereignisse in Ereignisse überführen, wie folgt.

<u>DIV-4</u> Sei $x \in M_p(SRZ)$ und $u \in W$. $f_u: E \rightarrow E$ und $g_u: E \rightarrow E$ werden definiert durch

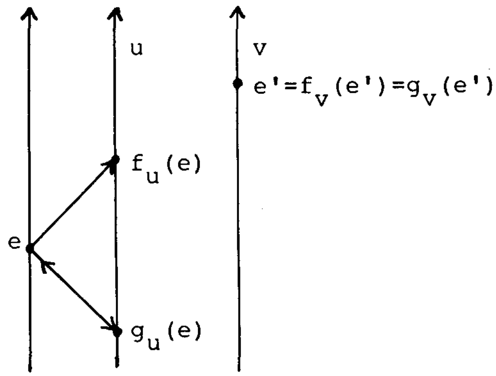
$$f_u(e) := \begin{cases} e & \text{,falls } e \in \hat{u} \\ \inf_{\prec} \{e'/e' \in u \text{ und } e \prec e'\} & \text{,falls } e \notin \hat{u} \end{cases}$$

$$g_u(e) := \begin{cases} e & \text{,falls } e \in \hat{u} \\ \sup_{\prec} \{e'/e' \in u \text{ und } e' \prec e\} & \text{,falls } e \notin \hat{u} \end{cases}$$

Anschaulich sind f_u und g_u wie in Figur 42) vorzustellen. Liegt das Ereignis e nicht auf der Bahn $\hat{u}$, so ist $f_u(e)$ das Ereignis, das im Eintreffen eines bei e abgesandten Lichtsignals auf $\hat{u}$

besteht.Und $g_u(e)$ ist das Ereignis auf u,für das ein dort abgehender Lichtstrahl e treffen würde.

Fig.42



Nach TIV-1c) sind $f_u(e)$ und $g_u(e)$ in potentiellen Modellen eindeutig bestimmt und damit f_u und g_u wohldefiniert,d.h.zum Beispiel für f_u,daß aus $f_u(e)=e_1$ und $f_u(e)=e_2$ folgt: $e_1=e_2$. Die Funktionen f_u und g_u werden im folgenden eine wichtige Rolle spielen.Zunächst noch ein Satz.

<u>TIV-3</u> Sei $x \in M_p(SRZ)$,$u \in W$ und $e \in E$.

a) f_u und g_u sind wohldefiniert

b) wenn $e \notin \hat{u}$,dann $e \prec f_u(e)$

c) wenn $e \notin \hat{u}$,dann $g_u(e) \prec e$ (ÜIV-10)

Mit Hilfe der Funktionen f_u und g_u kann man nun "geometrische" Beziehungen,wie sie uns in der Geometrie begegnet sind,für Bahnen definieren.Es handelt sich um die Relationen "zwischen" und "kongruent".Während diese in der Geometrie als Beziehungen zwischen Punkten auftreten,sind es hier Beziehungen zwischen Bahnen.Wir werden also <u>definieren</u>,was es heißt,Bahn $\hat{v}$ liege zwischen den Bahnen $\hat{u}$ und $\hat{u}_1$ und was es heißt,die Bahnen $\hat{u},\hat{v}$ und $\hat{u}',\hat{v}'$ seien kongruent.Hierdurch wird die früher benutzte Idee,den räumlichen Abstand ganzer Bahnen anstelle des Abstands einzelner Ereignisse zu betrachten,präzisiert und mittels der eingeführten Grundbegriffe definiert.

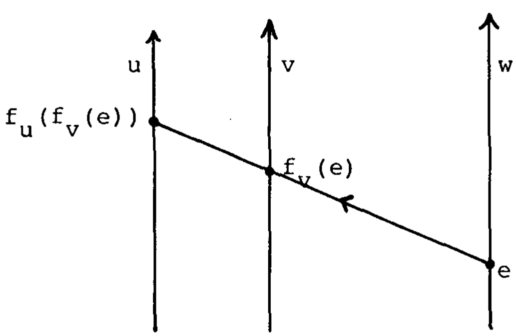
DIV-5 Es sei $x \in M_p(SRZ)$ und $u,v,u',v',u_1 \in W_x$.

a) $\underline{zw}_x(u,v,u_1)$ gdw $f_u \circ f_v \circ f_{u_1} = f_u \circ f_{u_1}$

b) $\equiv_x(u,v;u',v')$ gdw $f_{u'} \circ f_u \circ f_v \circ f_u = f_{u'} \circ f_{v'} \circ f_{u'} \circ f_u$

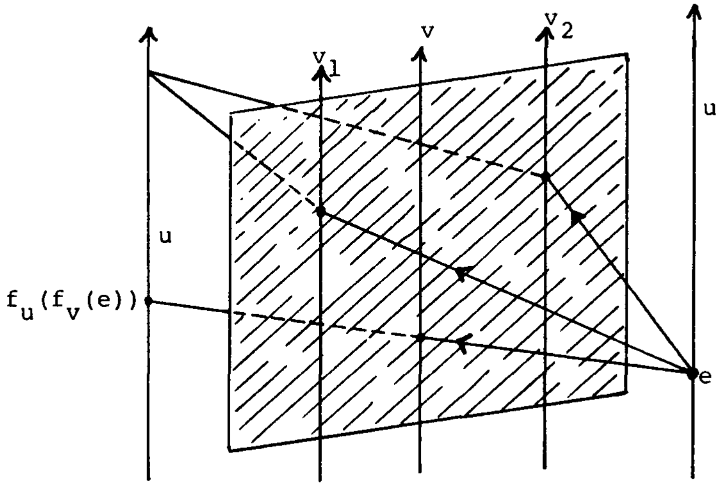
Der Kringel $\circ$ symbolisiert die Hintereinanderausführung von Funktionen.Genauer ist die Verknüpfung $(f \circ f')$ zweier Funktionen $f:E \to E$ und $f':E \to E$ definiert als die Funktion $(f \circ f'):E \to E$,für die für alle $e \in E$ gilt: $(f \circ f')(e)=f(f'(e))$. (ÜIV-11). In der Zeichnung bedeutet die Hintereinanderausführung von Funktionen das Weitersenden eines Signals.Wurde am Ereignis e ein Signal mit Lichtgeschwindigkeit abgesandt,so bildet dessen Ankunft in v ein Ereignis $f_v(e)$.Indem das Signal von $f_v(e)$ ohne Verzögerung (z.B.durch Spiegelung) weitergesandt wird,erhält man auf u als Ankunftsereignis $f_u(f_v(e))$. Dies ist aber nach Definition von $(f_u \circ f_v)$ gerade $(f_u \circ f_v)(e)$, also das Ereignis der Ankunft eines bei e abgesandten Lichtsignals,welches "über v" nach u gesandt wurde.Damit haben wir eine zwanglose verbale Umschreibung von $(f_u \circ f_v)(e)$ als "das Ankunftsereignis eines bei e abgesandten Lichtsignals,das von e nach u auf dem Weg über v gesandt wurde".Der Weg über v kann -muß aber nicht- ein Umweg sein.Das läßt sich in unseren zweidimensionalen Zeichnungen nur schlecht veranschaulichen. Betrachten wir Figur 43),so scheint es,als müsse jedes Signal von e nach u zwangsläufig den Weg über v nehmen.

Fig.43



Das ändert sich aber sofort,wenn wir statt des hier eindimensional gezeichneten räumlichen Anteils den Raum zweidimensional zeichnen.Dann kann die Bahn des Signals "vorne" oder "hinten" um v herumführen.Dies ist in Figur 44) dargestellt.

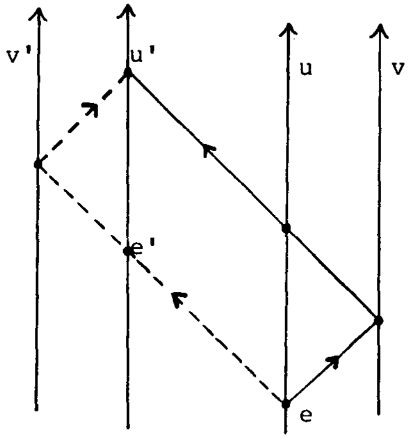
Fig.44



Von den drei Bahnen $\hat{v},\hat{v}_1,\hat{v}_2$ soll nur $\hat{v}$ in der Zeichenebene liegen,während $\hat{v}_1$ davor und $\hat{v}_2$ dahinter vorzustellen sind.Das Signal von e kann dann auf verschiedenen Wegen nach $\hat{u}$ gelangen.Der direkte Weg führt über $\hat{v}$.Bahnen,die über $\hat{v}_1$ oder $\hat{v}_2$ führen,beinhalten einen Umweg.Genau dies ist der Sinn der oben definierten Zwischenrelation. v liegt genau dann zwischen u und u_1,wenn jedes Lichtsignal von u_1 nach u auf "direktem" Weg zum gleichen Ankunftsereignis führt,wie ein Signal,das auf dem (Um)Weg über v nach u gelangt.Wenn v nicht zwischen u und u_1 liegt,macht das Signal über v einen echten Umweg und kommt folglich später in u an,als wenn es auf direktem Wege dorthin gelangt wäre. Die Funktion f_{u_1} in DIV-5a) ist nur formal nötig,um alle beliebigen Ereignisse zunächst einmal nach u_1 zu übertragen,denn wir interessieren uns nur für von u_1 abgesandte Ereignisse.

In ähnlicher Weise ist auch die Definition der Kongruenz zu verstehen.Daß zwei Bahnpaare <u,v> und <u',v'> kongruent sind, soll intuitiv heißen,daß sie gleichen räumlichen Abstand voneinander haben und zwar über den ganzen Bahnverlauf hinweg.In der Zeichnung sieht das folgendermaßen aus (siehe Fig.45).Wir gehen aus von einem Ereignis e auf der Bahn $\hat{u}$ (für nicht in $\hat{u}$ liegende Ereignisse ist formal in der Definition noch die Funktion f_u vorgeschaltet). Von e wird einmal ein Lichtsignal über v und über u nach u' gesandt (die durchgezogene Bahn in Figur 45) und zum anderen ein Signal über u' und über v' nach u' (die gestrichelte Bahn).

Fig.45



Kongruenz liegt vor, wenn für beliebiges e das Ankunftsereignis beider Signale das gleiche ist. Intuitiv läuft die Forderung darauf hinaus, daß der Signalweg von e über v nach u "in der gleichen Zeit" zurückgelegt wird, wie der Weg von e' über v' nach u'. Denn die Wege von u nach u' sind bei beiden Signalen gleich, wenn wir voraussetzen, daß u und u' ihren Abstand nicht ändern.

MODELLE

Mit Hilfe der vorangegangenen Definitionen können wir nun die Modelle einführen. Wir schreiben zunächst die Definition der Modelle auf und erläutern dann im Einzelnen die verschiedenen Axiome.

Ein Modell ist ein potentielles Modell, in dem die Axiome 2) bis 8) von DIV-6) gelten. Axiom 2) besagt intuitiv, daß die Funktionen f_v und g_u in gleicher Weise wirken, nur "in verschiedene Richtungen", nämlich f_v in Richtung "Zukunft" und

g_u in Richtung "Vergangenheit".

<u>DIV-6</u> x ist ein <u>Modell der speziell relativistischen Raum-Zeit-Theorie</u> ($x \in M(SRZ)$) gdw es E, W, $<$ und $\prec$ gibt, sodaß

1) $x=\langle E,W;<,\prec\rangle \in M_p(SRZ)$
2) für alle $u,v \in W$: wenn $u \neq v$, dann sind $f_{v/\hat{u}}$ und $g_{u/\hat{v}}$ invers zueinander
3) $\langle W;\underline{zw}_x, \equiv_x\rangle$ ist eine euklidische Geometrie
4) für alle $u,u',u_1,u_2 \in W$:

   $(f_v \circ f_{u'} \circ f_u) \circ (f_v \circ f_{u_2} \circ f_{u_1})_{/\hat{v}} = (f_v \circ f_{u_2} \circ f_{u_1}) \circ (f_v \circ f_{u'} \circ f_u)_{/\hat{v}}$
5) für alle $u \in W$ und $e,e' \in \hat{u}$: wenn $e \prec e'$, dann gibt es $v \in W$, sodaß $v \neq u$ und $f_u(f_v(e)) \prec e'$
6) für alle $u,u',v \in W$: $(f_v \circ f_{u'} \circ f_u)_{/\hat{v}} = (f_v \circ f_u \circ f_{u'})_{/\hat{v}}$
7) für alle $u \in W$ ist $\hat{u}$ bezüglich $\prec$ separabel
8) für alle $u,v,u' \in W$: wenn es $e \in \hat{u}'$ gibt mit $f_u(f_v(e)) = f_u(e)$, dann gilt: $\underline{zw}_x(u,v,u')$

Daß f_v und g_u in gleicher Weise wirken, wird ausgedrückt durch die Forderung, daß beide invers zueinander sind. Das bedeutet zweierlei. Erstens soll das Ergebnis einer Anwendung von g_u mit anschließender Anwendung von f_v wieder zu dem Ausgangsereignis führen, von dem aus man in v startete. Formal kann man das so ausdrücken:

$$f_{v/\hat{u}} \circ g_{u/\hat{v}} = Id_{\hat{v}}.$$

$Id_{\hat{v}}$ bezeichnet dabei die identische Abbildung auf $\hat{v}$, d.h. $Id_{\hat{v}}: \hat{v} \to \hat{v}$, $Id_{\hat{v}}(e) := e$. Mit $f_{/\hat{u}}$ soll die Einschränkung von f auf die Teilmenge $\hat{u}$ des Definitionsbereiches von f bezeichnet werden. Für $f: E \to E$ und $\hat{u} \subseteq E$ ist also $f_{/\hat{u}}$ die folgende Funktion:

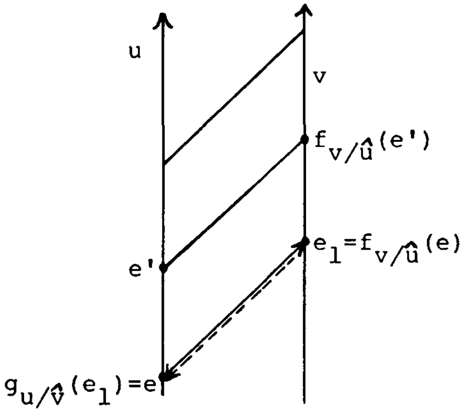
$$f_{/\hat{u}}: \hat{u} \to E \; , f_{/\hat{u}}(e) := f(e).$$

Zweitens soll umgekehrt das Ergebnis einer Anwendung von f_v mit anschließender Anwendung von g_u auch wieder zu dem Ausgangsereignis zurückführen, von dem aus man in u startete. Das heißt

$$g_{u/\hat{v}} \circ f_{v/\hat{u}} = Id_{\hat{u}}.$$

Wenn allgemein zwei Funktionen in dieser Art invers zueinander sind,so läßt sich deren Bijektivität beweisen (ÜIV-12).Das heißt,daß sie erstens verschiedene Argumente auf verschiedene Funktionswerte abbilden und (was bei Funktionen im allgemeinen nicht der Fall zu sein braucht) zweitens jedes Element ihres Wertebereichs als Funktionswert annehmen.Da in Axiom 2) nur auf bestimmte Bahnen $\hat{u}$ eingeschränkte Funktionen betrachtet werden,läßt sich die Bijektivität der Abbildungen leicht veranschaulichen.Man betrachte zwei Bahnen $\hat{u}$ und $\hat{v}$ (siehe Figur 46).

Fig.46



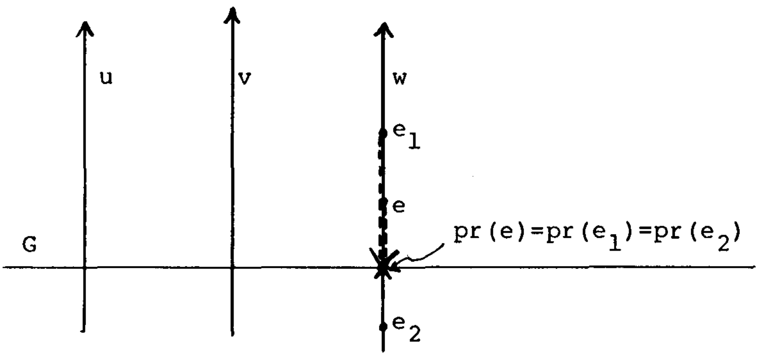
Die Abbildung $f_{v/\hat{u}}$ bildet die Ereignisse von $\hat{u}$ bijektiv auf die von $\hat{v}$ ab,d.h.mit $e \neq e'$ sind auch die Werte $f_{v/\hat{u}}(e)$ und $f_{v/\hat{u}}(e')$ verschieden und alle Elemente von $\hat{v}$ werden als Funktionswerte auftreten.

Axiom 3) ist das wichtigste in DIV-6).Zu seinem Verständnis müssen wir uns an die Geometrie aus Kap.III erinnern,deren Modelle dort die Gestalt $\langle R;\underline{zw},\equiv\rangle$ hatten,wobei R eine Menge (von Raumpunkten) war und $\underline{zw}$ bzw.$\equiv$ die Zwischen- und Kongruenzrelation.Nun haben wir in DIV-5) eine dreistellige Relation $\underline{zw}_x$ und eine vierstellige Relation $\equiv_x$ für Elemente von W definiert und es ist in klarer Weise die Struktur

$$\langle W;\underline{zw}_x, \equiv_x\rangle$$

ein potentielles Modell der Geometrie.Von diesem potentiellen Modell wird in 3) gefordert,daß es auch alle Axiome der Geometrie erfüllt.Es soll also ein Modell der euklidischen Geometrie im Sinne von Kap.III sein (vergleiche DIII-2).Etwas weniger formal besagt das Axiom,daß die Elemente von W sich wie Raumpunkte in einer Geometrie verhalten.Noch anders,wenn wir uns erinnern,daß die Elemente von W hier als Namen von Bahnen aufgefaßt werden können,läßt sich das Axiom folgendermaßen ausdrücken: die Bahnen sollen sich wie Raumpunkte in der Geometrie verhalten.Nun fällt es einem schwer,sich Bahnen als Raumpunkte vorzustellen.Es gibt aber einen einfachen Trick,der zu einer Anschauungsmöglichkeit führt.Wie schon früher gesagt, behandeln wir die Bahnen hier so,daß sich die räumlichen Abstände der auf den Bahnen entlanglaufenden Dinge nicht ändern. Wir können daher die räumlichen Abstände der Bahnen identifizieren mit den räumlichen Abständen "gleichzeitiger" Ereignisse auf den Bahnen,wobei -wie schon früher gesagt- der Gleichzeitigkeitsbegriff problematisch ist.Nehmen wir aber an, wir hätten einen Begriff der Gleichzeitigkeit und daß dieser im Bild so vorzustellen ist,daß alle gleichzeitigen Ereignisse auf einer horizontalen Geraden G,wie in Figur 47) dargestellt, liegen.

Fig.47



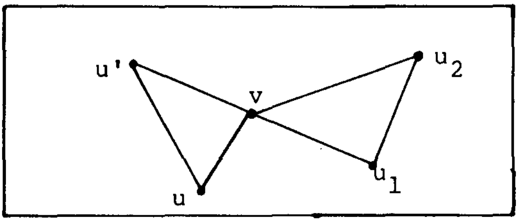
Wenn wir nun alle Ereignisse der Menge E auf diese Gerade G "projizieren" (ÜIV-13),so fallen alle auf einer Bahn liegenden Ereignisse auf den gleichen Punkt von G,nämlich den Schnittpunkt von G mit der Bahn.Alles,was wir über die räumlichen Abstände der Bahnen aussagen können,ist aber schon enthalten in den Informationen,die wir über die Abstände der

"Projektionspunkte" der Bahnen auf G haben.Das stimmt natürlich nur,weil wir annehmen,daß sich die Abstände der Bahnen nicht ändern.Es genügt dann,die Gerade G zu betrachten.In ihr sind alle räumlichen Verhältnisse in "projizierter Form" schon ablesbar.Axiom 3) sagt aus,daß G (oder irgendeine andere horizontale Gerade alle Eigenschaften einer Geraden in der euklidischen Geometrie hat.Wenn wir den räumlichen Anteil eines Modells im Bild zweidimensional darstellen,so wird G zu einer Ebene und Axiom 3) fordert,daß jede solche Ebene die Axiome der Geometrie erfüllt.Noch anders kann man sagen,daß Axiom 3) etwas über räumliche "Schnitte" aussagt.Wir stellen uns im Bild einen horizontalen Schnitt durch das Raum-Zeit-Kontinuum vor.Dieser Schnitt soll dann ein Modell der Geometrie sein.

Axiom 3) ist außerordentlich stark.Aus ihm folgt z.B.,daß die Bahnen kontinuierlich dicht nebeneinander liegen müssen und "nach außen" weitergehend sich immer neue Bahnen finden müssen.

Das nächste Axiom versteht man am besten,wenn man die Bahnen wie zuvor beschrieben,auf eine Gerade,oder noch besser auf eine Ebene projiziert.Die Punkte auf der Ebene in Figur 48) stellen dann -auf die Ebene projizierte- Bahnen dar.

Fig.48



Axiom 4) besagt,daß ein von v abgehendes Lichtsignal,das über u_1,u_2,v,u,u' wieder nach v zurückgelangt,dort zum gleichen Ankunftsereignis führt,wie ein gleichzeitig (d.h.beim gleichen Ereignis) abgehendes Lichtsignal,das den umgekehrten Weg,nämlich über u,u',v,u_1,u_2 zurück nach v nimmt.Es ist also gleich-

gültig,in welcher Reihenfolge die beiden "räumlichen" Dreiecke vom Licht durchlaufen werden (ÜIV-14).Das Axiom beinhaltet eine Symmetrieforderung.Da das Licht für das Durchlaufen der Dreiecke eine gewisse Zeit benötigt,fordert Axiom 4),daß der Lichtumlauf zu allen Zeiten in gleicher Weise stattfindet.Es wird eine Art Homogenität der Übertragung von Lichtsignalen in der Zeit postuliert.

Axiom 5) besagt,daß die Bahnen bezüglich der $\prec$-Relation "dicht" liegen.Selbst wenn die Ereignisse e und e' auf u sehr nahe beisammen liegen,muß es immer eine andere Bahn v geben, sodaß ein Lichtsignal von e nach v und von dort nach u gesandt noch vor e' auf u ankommt.Wenn e und e' sehr dicht beieinander liegen,so kann v nicht weit von u (räumlich) entfert sein (ÜIV-15).

Auch das nächste Axiom läßt sich am besten bei Projektion der Bahnen auf eine Ebene darstellen.Es besagt,daß Lichtsignale,die von v ausgehen und ein Dreieck mit Eckpunkten u,u',v durchlaufen,"gleichzeitig" ankommen,wenn sie gleichzeitig abgehen und das Dreieck in entgegengesetzter Umlaufsrichtung durchmessen.

Axiom 7) ist eine Abkürzung für folgende Forderung.Es gibt eine <u>abzählbare</u> Teilmenge D von $\hat{u}$,sodaß sich jedes Element von $\hat{u}$ als Grenzwert einer Folge in D darstellen läßt.Die <u>Abzählbarkeit</u> von D läßt sich definieren durch die Forderung nach Existenz einer bijektiven Abbildung φ :D$\rightarrow \mathbb{N}$.Eine <u>Folge in</u> D ist einfach eine Folge $e_1,e_2,e_3,\ldots$ von Elementen in D.Und daß e der <u>Grenzwert einer</u> solchen <u>Folge</u> ist,möge heißen:

1) die Folge ist <u>monoton wachsend</u> (d.h.$e_1 \prec e_2 \prec e_3 \prec \ldots$)
2) $e=\sup_{\prec}\{e_i/i \in \mathbb{N}\}$.

Dabei braucht e selbst kein Element von D zu sein.Dieses Axiom hat lediglich technischen Charakter und läßt sich wohl mit Hilfe von Axiom 3) sogar beweisen,wenngleich der Beweis ziemlich kompliziert ist.Das Axiom bewirkt,daß die Strukturen $\langle\hat{u};\prec_{/\hat{u}}\rangle$ "topologisch isomorph" zur Struktur $\langle\mathbb{R};<\rangle$ sind und braucht hier nicht weiter betrachtet zu werden.

Das letzte Axiom betrifft die Lage der Bahnen relativ zueinander.Es schließt aus,daß Bahnen "schräg" zueinander verlaufen. Denn wenn von irgendeinem Ereignis aus ein Lichtstrahl von u' über v direkt nach u geht, so muß dies nach Axiom 8) schon für alle Ereignisse aus u' gelten (vergleiche die Definition der Zwischenrelation $\underline{zw}_x$). Würden zwei Bahnen $\hat{u}'$, $\hat{v}$ nicht parallel zueinander verlaufen, so könnte man eine dritte Bahn $\hat{u}$ finden, sodaß Axiom 8) für u', v und u falsch wird.

Wir wollen noch einige Folgerungen in Form eines Satzes aufschreiben.

<u>TIV-4</u> Es sei $x \in M(SRZ)$.

a) Wenn $u \in W, e, e' \in E, e \notin \hat{u}$ und $e \prec e'$, dann nicht: $e' \rightsquigarrow f_u(e)$

b) Für alle $u \in W, e \in \hat{u}, e_1, e_2 \in E$: wenn $e \prec e_1$ und $e_1 \rightsquigarrow e_2$, dann gibt es $e' \in \hat{u}$, sodaß $e \prec e' \prec e_2$

c) Für alle $u \in W, e \in \hat{u}, e_1, e_2 \in E$: wenn $e_1 \rightsquigarrow e_2$ und $e_2 \prec e$, dann gibt es $e' \in \hat{u}$, sodaß $e_1 \prec e' \prec e$

d) Für alle $u \in W$ und $e, e' \in \hat{u}$: wenn $e \prec e'$, dann gibt es $e_o \in \hat{u}$, sodaß $e \prec e_o$ und $e_o \prec e'$

e) Für alle $u \in W$ ist $\hat{u}$ durch $\prec$ und durch $\rightsquigarrow$ linear geordnet. Die Ordnungen sind dicht, stetig, separabel und offen

Zum Beweis von Teil b) wähle man eine Bahn $\hat{v}$, sodaß $e_2 \in \hat{v}$. Man zeigt, daß $e \prec g_u(e_2)$. Angenommen, es gelte $e = g_u(e_2)$, so erhielte man $f_v(e) = f_v(g_u(e_2)) = e_2$ und hieraus mit Teil a) des Satzes einen Widerspruch. Also ist $e \prec g_u(e_2) \prec e_2$, weil wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen können, daß $e_2 \notin \hat{u}$. Mit $e' := g_u(e_2)$ ist der Beweis erbracht. c) beweist man wie b) mit a). d) folgt unmittelbar aus Axiom 5) mit $e_o := f_u(f_v(e))$. Wir beweisen nun Teil e). Transitivität und Antireflexivität von $\prec$ sind in DIV-2-4) enthalten. Konnexität folgt aus DIV-2-9) und der Definition von $\rightsquigarrow$. Teil d) besagt gerade, daß $\prec$ auf $\hat{u}$ dicht ist. Stetigkeit und Separabilität sind in DIV-2-8) und DIV-6-7) gefordert. Daß $\hat{u}$ offen ist, heißt genauer: zu $e \in \hat{u}$ gibt es $e_1, e_2 \in \hat{u}$ mit $e_1 \prec e \prec e_2$. Dies folgt aus DIV-2-10). Zum Nachweis der entsprechenden Eigenschaften für $\rightsquigarrow$ benutzt man die Tatsache, daß gilt: für alle $e, e' \in \hat{u}$: $e \prec e' \Leftrightarrow e \rightsquigarrow e'$. Die Richtung von links nach rechts ist hier trivial und folgt aus der Definition von $\rightsquigarrow$. Die Umkehrung erfordert einige Übersicht

über die Axiome und sei dem Leser als Anreiz zu einer tieferen Einarbeitung in die Theorie überlassen (ÜIV-17).
(ÜIV-18).

REDUKTION DER KLASSISCHEN RAUM-ZEIT-THEORIE AUF DIE SRZ

Wir kommen nun zu einem Thema,das in der Philosophie unter dem Stichwort "Inkommensurabilität" viele Diskussionen verursacht hat.Es wurde und wird behauptet,daß klassische und entsprechende relativistische Theorien inkommensurabel (d.h.unvergleichbar) sind. Manchmal wird unter Inkommensurabilität verstanden,daß zwei Theorien gemeinsame Begriffe enthalten,die jedoch in beiden Theorien Verschiedenes bedeuten.Eine solche Formulierung ist für den vorliegenden Fall der klassischen Raum-Zeit-Theorie und der SRZ wenig erhellend,weil die Modelle beider Theorien in unserer Darstellung <u>überhaupt nichts</u> gemeinsam haben.Modelle der klassischen Raum-Zeit-Theorie haben die Form $\langle R,Z;\lessdot,d\rangle$,Modelle der SRZ die Form $\langle E,W;\prec,\prec\rangle$.Wenn wir die Grundbegriffe wie in Kap.I als Mengen der entsprechenden Modellkomponenten auffassen,so haben beide Theorien keine Grundbegriffe gemeinsam.Wenn man trotzdem von Unvergleichbarkeit redet,so muß man zunächst einmal sagen,was man darunter versteht.Wir wollen dies hier nicht versuchen,zumal ein solcher Versuch wenig Chancen auf Erfolg hätte.Wir wollen vielmehr zeigen,daß beide Theorien in einem <u>wohlbestimmten</u> Sinn vergleichbar sind,nämlich dadurch,daß man die klassische Raum-Zeit-Theorie in die SRZ "übersetzt".Die SRZ erweist sich damit als die "reichere" Theorie,in der die ganze klassische Raum-Zeit-Theorie in gewissem Sinn (d.h.nach Übersetzung) inkorporiert ist.Umgekehrt läßt sich die SRZ nicht in eine klassische Raum-Zeit-Theorie übersetzen,sodaß ein asymmetrisches Verhältnis vorliegt.Eine solche Beziehung bildet ein schönes,wenn auch nicht vollständiges Kriterium für wissenschaftlichen Fortschritt.Man kann wegen dieser Beziehung mit Recht sagen,die SRZ stelle gegenüber der klassischen Raum-Zeit-Theorie einen Fortschritt dar.

Um nun diese Beziehung zwischen beiden Theorien genauer verstehen zu können,definieren wir zunächst eine "Übersetzungsrelation",die wir mit ϱ bezeichnen.Die intuitive Vorstellung einer Übersetzung ist,jedem Begriff der Raum-Zeit-Theorie einen bedeutungsgleichen (eventuell definierten) Begriff aus der SRZ zuzuordnen.So einfach geht es aber nicht. Erstens ist klar,daß man nicht jeden einzelnen Begriff der klassischen Raum-Zeit-Theorie in die SRZ übersetzen kann.Denn der wesentliche Unterschied zwischen beiden Theorien besteht ja gerade darin,daß in der relativistischen Theorie die Begriffe von Raum und Zeit zu einer untrennbaren Einheit zusammengefaßt sind,in der sie wechselseitig voneinander abhängen. Man darf daher nicht erwarten,beide Begriffe bedeutungsgleich in die SRZ übersetzen zu können.Zweitens gibt es auch sonst Probleme mit der Bedeutungserhaltung.Es ist selbst in den Fällen,wo ein klassischer Begriff unmittelbar übersetzt wird, nicht klar,ob er in der SRZ in übersetzter Form die gleiche Bedeutung wie vorher hat.Wir sind zwar geneigt,die Bedeutung möglichst zu erhalten,es scheint aber ein aussichtsloses Unterfangen,sich auf die Behauptung einzulassen,daß die Bedeutung in bestimmten Fällen tatsächlich erhalten werde.Denn der Begriff der Bedeutung ist nach wie vor äußerst unklar und umstritten.

Unsere Übersetzung funktioniert nicht zwischen einzelnen Begriffen,sondern "global",d.h.ganze Modelle oder potentielle Modelle werden ineinander "übersetzt".Das entspricht vielleicht nicht unseren geläufigen Vorstellungen von "Übersetzung",aber unser Vorgehen hat so viele Ähnlichkeiten mit Übersetzungen,daß wir an der Bezeichnung festhalten wollen.

Die globale Übersetzungsrelation wird wie folgt definiert.

<u>DIV-7</u> Sind $x=\langle R,Z;\lessdot,d\rangle$ und $x'=\langle E,W;\lessdot,\prec\rangle$ potentielle Modelle der klassischen Raum-Zeit-Theorie und der SRZ, so gelte $x\,\varrho\,x'$ ("x und x' stehen in der Reduktionsbeziehung") gdw

1) $W=R$
2) $E=\{\langle t,a\rangle / t\in Z \text{ und } a\in R\}$
3) $\lessdot=\{\langle\langle t,a\rangle,a\rangle / a\in R \text{ und } t\in Z\}$
4) für alle $t\in Z$: $\underline{zw}_{d,t}=\underline{zw}_{x'}$ und $\equiv_{d,t}=\equiv_{x'}$
5) $\langle Z;\lessdot\rangle\in M(\text{ZEIT})$

6) für alle t,t' und a,b: $\langle t,a\rangle \prec \langle t',b\rangle$ gdw
$t < t'$ und $d_t(a,b) \leq t'-t$

Da diese Definition als Übersetzung <u>von</u> der klassischen <u>in</u> die relativistische Theorie intendiert ist, wollen wir auch die einzelnen Bedingungen in diesem Sinn interpretieren. Nach 1) wird die Menge R der Raumpunkte identifiziert mit der Bahnmenge im relativistischen Modell (genauer: mit der Menge der Dinge, die die Bahnen erzeugen). Dies wird besonders dann plausibel, wenn wir die Elemente von W als Namen für Bahnen oder als Dinge auffassen, die die Bahnen durchlaufen. In 2) werden die Ereignisse von x' identifiziert mit Paaren $\langle t,a\rangle$, bestehend aus einem "klassischen" Zeitpunkt t und einem Raumpunkt a. Durch diese Identität wird insbesondere Z, die Menge der klassischen Zeitpunkte, mit den Ereignissen in Verbindung gebracht. Eine direkte Übersetzung ist, wie schon angesprochen, nicht möglich. 3) enthält die Gleichsetzung der $\lessdot$ -Relation mit einer geeigneten Menge von Entitäten, die im Vokabular der klassischen Theorie definierbar sind. $e \lessdot u$ heißt ja, daß das Ereignis e auf der Bahn $\hat{u}$ liegt, oder daß u in e einbezogen ist ist. Wenn man Bahnen mit Raumpunkten identifiziert und Ereignisse mit Paaren $\langle t,a\rangle$ von Zeit- und Raumpunkten, so liegt diese Gleichsetzung auf der Hand, denn sie bewirkt, daß genau die Ereignisse der Form $\langle t,a\rangle$ auf der "Bahn" a liegen. In 4) wird gefordert, daß die relativistisch definierten Zwischen- und Kongruenzrelationen $\underline{zw}_x$ und $\equiv_x$ mit den in den klassischen Modellen vorkommenden Relationen übereinstimmen, falls letztere auf einen beliebigen Zeitpunkt relativiert werden. Zur Definition von $\underline{zw}_{d,t}$ vergleiche man Kap. III (DIII-4). Auch diese Identifikationen ergeben sich in natürlicher Weise, nachdem man Bahnen mit Raumpunkten identifiziert hat. Bedingung 5) hat mehr den Charakter einer Voraussetzung und ist letzten Endes wegen unserer "Mathematisierung" der Zeit nötig. Bei der in Kapitel III erwähnten Behandlung von Zeitpunkten als Grundobjekten (die keine reellen Zahlen sind), könnte man 5) hier weglassen. Wir wollen nur solche Strukturen übersetzen, deren entsprechende Komponenten Modelle der klassischen Zeittheorie sind. Die letzte Forderung stellt einen Zusammenhang her zwischen der klassischen Abstandsfunktion d und der "Kausalrelation" $\prec$. Auch hier findet keine unmittelbare Übersetzung statt, sondern beide Begriffe werden in allgemeinerer Weise miteinander in Beziehung gebracht.

Wir können nun folgenden Satz beweisen:

TIV-5 a) Gilt $x' \in M(SRZ)$, ist x ein potentielles Modell der klassischen Raum-Zeit-Theorie und gilt $x \, \varrho \, x'$, so ist x ein Modell der klassischen Raum-Zeit-Theorie

b) Zu jedem Modell x der klassischen Raum-Zeit-Theorie mit der Eigenschaft, daß für alle $t,t' \in Z$ gilt $d_t = d_{t'}$, gibt es ein x' mit:

1) $x' \in M(SRZ)$ und

2) $x \, \varrho \, x'$

Beweis: a) Es gelte $x' \in M(SRZ)$ und $x \, \varrho \, x'$. 1) Aus DIV-4) erhält man für $t,t' \in Z$: $\underline{zw}_{d,t} = \underline{zw}_{d,t'}$ und $\equiv_{d,t} = \equiv_{d,t'}$. Nach TIII-2) aus Kapitel III ist aber in einem Modell der Geometrie eine mit der Zwischen- und Kongruenzrelation in natürlicher Weise verknüpfte Abstandsfunktion bis auf einen positiven Faktor eindeutig bestimmt. Es folgt, daß $d_t = \alpha \cdot d_{t'}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}^+$, womit DIII-6-5) bewiesen ist. 2) Da $x' \in M(SRZ)$, ist $\langle W; \underline{zw}_{x'}, \equiv_{x'} \rangle \in M(GEO)$ und folglich wegen DIV-7-1) und 4) auch für alle $t \in Z$: $\langle R; \underline{zw}_{d,t}, \equiv_{d,t} \rangle \in M(GEO)$, womit DIII-6-4) bewiesen ist. Daß $\langle Z; \lessdot \rangle$ ein Modell der Zeittheorie ist, brauchen wir nicht zu beweisen, da dies in der Definition von ϱ gefordert wird.

b) Es sei $x = \langle R, Z; \lessdot, d \rangle$ ein Modell der klassischen Raum-Zeit-Theorie mit der vorausgesetzten Eigenschaft, die wir mit (*) bezeichnen. Wir definieren W, E, $\preccurlyeq$ und $\prec$ durch die Bedingungen 1), 2), 3) und 6) von DIV-7). Zu zeigen ist nun, daß

A) $x' := \langle E, W; \preccurlyeq, \prec \rangle \in M_p(SRZ)$

B) $x \, \varrho \, x'$ und

C) $x' \in M(SRZ)$.

Für die beiden Strukturen x und x' beweisen wir zunächst einige Lemmata.

Lemma 1 Für $a \in R$ und $X \subseteq \{\langle t,a \rangle / t \in \mathbb{R}\}$ gilt

$\inf_{\prec} X = \langle \inf\{t / \langle t,a \rangle \in X\}, a \rangle$

Beweis: Es sei $Q := \langle \inf\{t / \langle t,a \rangle \in X\}, a \rangle$, $t^* := \inf\{t / \langle t,a \rangle \in X\}$ und

$Q':=\langle t_o,a\rangle \in X$.Es folgt: $t^* \leq t_o$.Wir unterscheiden zwei Fälle. 1) $t^*=t_o$.Dann ist $Q=Q'$,also $Q \preccurlyeq Q'$.2) $t^*< t_o$.Dann folgt nach DIV-7-6): $Q \prec Q'$.Also in jedem Fall $Q \preccurlyeq Q'$,womit Q eine untere Schranke von X ist.Nun sei Q^o eine beliebige untere Schranke von X.Wir müssen zeigen,daß $Q^o \preccurlyeq Q$,d.h. mit $Q^o=\langle t_1,b\rangle$:

(1) $t_1 \leq t^*$ und $d_{t_1}(a,b) \leq t^*-t_1$

Annahme: $t^*< t_1$.

Es ist $t_1 \leq t$ für alle t mit $\langle t,a\rangle \in X$,denn für $\langle t,a\rangle \in X$ folgt $\langle t_1,b\rangle \preccurlyeq \langle t,a\rangle$,weil Q^o untere Schranke ist,und hieraus $t_1 \leq t$ nach DIV-7-6).Aber $t^*< t_1 \leq \{t/\langle t,a\rangle \in X\}$ liefert einen Widerspruch zu $t^*=\inf\{t/\langle t,a\rangle \in X\}$.

Annahme: $d_{t_1}(a,b) > t^*-t_1$.

Da $t^*=\inf\{t/\langle t,a\rangle \in X\}$,gibt es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein t_2 mit $t^*+\varepsilon > t_2$ und $\langle t_2,a\rangle \in X$.Da Q^o untere Schranke von X ist,folgt $\langle t_1,b\rangle \preccurlyeq \langle t_2,a\rangle$ und hieraus $t_1 \leq t_2$ und $d_{t_1}(a,b) \leq t_2-t_1 < t^*+\varepsilon - t_1=t^*-t_1+\varepsilon$ nach Wahl von t_2 und DIV-7-6).Dies liefert aber bei hinreichend klein gewähltem ε einen Widerspruch zur Annahme.Damit ist (1) bewiesen.

<u>Lemma 2</u> $\sup_{\prec} X=\langle \sup_{\leq}\{t/\langle t,a\rangle \in X\},a\rangle$

Beweis: wie Lemma 1.

<u>Lemma 3</u> Für $t \in Z$ und $a,b \in R$ gilt: $f_b(\langle t,a\rangle)=\langle t+d_t(a,b),b\rangle$.

Beweis: $f_b(\langle t,a\rangle)=\inf_{\prec}\{e'/e' \in b \text{ und } e \prec e'\}$ (Def.von f_b)

$=\inf_{\prec}\{\langle t',a'\rangle/a'=b \text{ und } \langle t,a\rangle \prec \langle t',a'\rangle\}$ (DIV-7-3)

$=\inf\{\langle t',b\rangle/\langle t,a\rangle \prec \langle t',b\rangle\}$

$=\inf\{\langle t',b\rangle/t < t' \text{ und } d_t(a,b) \leq t'-t\}$ (DIV-7-6)

Es sei $M:=\{\langle t',b\rangle/t < t' \text{ und } d_t(a,b) \leq t'-t\}$,$t^*:=t+d_t(a,b)$ und $Q:=\langle t^*,b\rangle$.Wir zeigen

(2) $\inf_{\prec} M=Q$.

Ist $\langle t',b\rangle \in M$,so gilt $t < t'$ und $d_t(a,b) \leq t'-t$.Es folgt $t+d_t(a,b) \leq t'$, $d_{t'}(b,b) \leq t'-t$ und damit $Q \preccurlyeq \langle t',b\rangle$ nach DIV-7-6).Also ist Q untere Schranke von M.Nun sei Q' eine untere Schranke von M.Wir zeigen,daß $Q' \preccurlyeq Q$,d.h.für $Q'=\langle t_o,c\rangle$,daß gilt

(3) $t_o \leq t^*$ und $d_{t_o}(c,b) \leq t^*-t_o$.

Annahme: $t^* < t_o$.

Sei t_1 so,daß $t^*< t_1 < t_o$.Dann ist $t \leq t^* < t_1$ und $d_t(a,b) \leq t_1-t$, weil aus $t^*=t+d_t(a,b)$ folgt: $d_t(a,b)=t^*-t < t_1-t$. Also ist $<t_1,b> \in M$ und es gilt offenbar auch $<t_1,b> \prec <t_o,b>$. Dies ist ein Widerspruch dazu, daß Q' untere Schranke von M ist, denn $<t_1,b> \in M$ und $<t_1,b> \prec Q'$.

Annahme: $d_{t_o}(c,b) > t^*-t_o$.

Sei $t_1 := t^*+\varepsilon$ mit beliebigem $\varepsilon > 0$. Dann ist $<t_1,b> \in M$ und folglich, da Q' untere Schranke von M, $<t_o,c> \preccurlyeq <t_1,b>$. Hieraus erhält man nach DIV-7-6) $t_o \leq t_1$ und $d_{t_o}(c,b) \leq t_1-t_o=t^*+\varepsilon-t_o= t^*-t_o+\varepsilon$, was bei hinreichend klein gewähltem ε einen Widerspruch zur Annahme ergibt. Damit ist (3) bewiesen.

<u>Lemma 4</u> Sind $a,b,c \in R, t_o \in Z$ und gilt $f_a(<t_o,c>)=f_b(<t_o,c>)$,

so gilt auch: für alle $t \in Z$: $f_a(<t,c>)=f_b(<t,c>)$

Beweis: Nach Lemma 3 ergibt die Voraussetzung $<t_o-d_{t_o}(c,a),a> =<t_o+d_{t_o}(a,c),b>$. Hieraus folgt $a=b$ und $d_{t_o}(c,a)=d_{t_o}(c,b)$ und somit $t+d_{t_o}(c,a)=t+d_{t_o}(c,b)$, also wegen (*): $t+d_t(c,a)=d_t(c,b)$ und $a=b$. Das heißt aber $f_a(<t,c>)=f_b(<t,c>)$.

Wir wenden uns nun dem Beweis von TIV-5b) zu.

A): DIV-2-5) und DIV-2-6) sind trivial, DIV-2-4) und 2-7) überlassen wir dem Leser (ÜIV-19). Zum Beweis von DIV-2-8) benutzt man Lemma 1 und Lemma 2. Danach existieren die Infima und Suprema und sind beide $\lessdot$ a (nach DIV-7-3).

DIV-2-9): Es ist zu zeigen, daß aus $<t,a> \lessdot b$ und $<t',a'> \lessdot b$ folgt: $<t,a>=<t',a'>$ oder $<t,a> \rightsquigarrow <t',a'>$ oder $<t',a'> \rightsquigarrow <t,a>$. Die Voraussetzung impliziert $a=b=a'$, also $a=a'$. Für t und t' gilt nun in $\mathbb{R}$: $t=t'$ oder $t < t'$ oder $t' < t$. Wir betrachten demzufolge drei Fälle.

1.Fall: $t=t'$. Dann ist $<t,a>=<t',a'>$ und die Aussage richtig.

2.Fall: $t < t'$. Wir zeigen, daß $<t,a> \rightsquigarrow <t',a'>$ $(=<t',a'>)$ oder genauer:

(4) es gibt t_o und b, sodaß 1) $<t,a> \prec <t_o,a>$, 2) $<t_o,a> \prec <t',a>$, 3) $<t,a> \prec <t_o,b>$, 4) $<t_o,b> \prec <t',a>$, 5) nicht: $<t_o,a> \prec <t_o,b>$, 6) nicht: $<t_o,b> \prec <t_o,a>$ und 7) $<t_o,a> \neq <t_o,b>$ (gemäß DIV-1e).

Es sei t_o so gewählt, daß $t < t_o < t'$ und $t_o-t < t'-t_o$. Nach Voraussetzung ist $<R;\underline{zw}_{d,t'}, \equiv_{d,t}> \in M(GEO)$. In der Geometrie läßt sich nun beweisen, daß es ein $b \in R$ gibt, sodaß $b \neq a$ und

$d_t(a,b) \leq 1/2(t_o-t)$.Dann sind obige Bedingungen 1),2),5),6) und 7) offenbar erfüllt.3) gilt wegen $t < t_o$ und $d_t(a,b)$ $1/2(t_o-t) < t_o-t$ und 4) wegen $t_o < t'$ und $d_{t_o}(a,b)=d_t(a,b) \leq$ $1/2(t_o-t) < t'-t_o$ unter Benutzung von (*).Damit ist (4) bewiesen.

3.Fall: $t' < t$. Diesen behandelt man wie Fall 2.

DIV-2-10): Sei $a \in W, \langle t,b\rangle \in E$.Wir wählen $t_1 > t+d_t(a,b)$ und $t_2 < t-d_t(a,b)$.Dann sind $\langle t_1,a\rangle \preccurlyeq a$ und $\langle t_2,a\rangle \preccurlyeq a$ und es gilt $\langle t_2,a\rangle \prec \langle t,b\rangle \prec \langle t_1,a\rangle$,denn $t_2 < t$ und $d_{t_2}(a,b) \leq t-t_2$ nach Wahl von t_2 und $t < t_1$ und $d_t(a,b) \leq t_1-t$ nach Wahl von t_1.

B): DIV-7-1) bis 7-3) sind nach Definition von $E,W,\preccurlyeq$ und $\prec$ erfüllt.DIV-7-5) gilt,weil x ein Modell der klassischen Raum-Zeit-Theorie ist und folglich auch $\langle Z;< \rangle \in M(ZEIT)$.Es bleibt DIV-7-4).

a) $\underline{zw}_x=\underline{zw}_{d,t}$.

Sei $t \in Z$ und $a \in R$. $\underline{zw}_x(a',b',c')$ impliziert nach DIV-5a) $f_{a'} \circ f_{b'}=f_{a'} \circ f_{c'}$ .Durch Ausrechnung mit Hilfe von Lemma 3 erhält man für $\langle t,a\rangle$ als Argument und unter Benutzung von (*) $\langle t+d_t(a,c')+d_t(c',b')+d_t(b',a'),a'\rangle=\langle t+d_t(a,c')+d_t(c',a'),a'\rangle$, also $d_t(c',a')=d_t(c',b')+d_t(b',a')$,d.h. $\underline{zw}_{d,t}(a',b',c')$ nach Definition von $\underline{zw}_{d,t}$.Gilt umgekehrt $\underline{zw}_{d,t}(a',b',c')$,so erhält man,indem man die gerade gemachten Berechnungen rückwärts durchgeht,für beliebiges $a \in R$: $(f_{a'} \circ f_{b'} \circ f_{c'})(\langle t,a\rangle)=$ $(f_{a'} \circ f_{c'})(\langle t,a\rangle)$ und hieraus nach Lemma 4 $f_{a'} \circ f_{b'} \circ f_{c'}=f_{a'} \circ f_{c'}$ also nach DIV-5a) $\underline{zw}_x(a',b',c')$.

b) $\equiv_x=\equiv_{d,t}$.

Sei $t \in Z$ und $b \in R$.Aus $ab \equiv_x a'b'$ erhält man mit DIV-5b) und Lemma 3,sowie (*) durch Rechnung: $2d_t(a,b)+d_t(a,a')=2d_t(a',b')$ $+d_t(a,a')$,also $d_t(a,b)=d_t(a',b')$ und somit $ab \equiv_{d,t} a'b'$.Umgekehrt folgt aus $ab \equiv_{d,t} a'b'$ durch Rückwärtsrechnen,daß für alle $c \in R$: $(f_{a'} \circ f_a \circ f_b \circ f_a)(\langle t,c\rangle)=(f_{a'} \circ f_{b'} \circ f_{a'} \circ f_a)(\langle t,c\rangle)$. Hieraus erhält man mit Lemma 4 die Gleichung für alle t und alle c,woraus schließlich $ab \equiv_x a'b'$ folgt.

C): DIV-6-2): Daß $f_{a/\hat{b}}$ und $g_{b/\hat{a}}$ invers zueinander sind,heißt a) $f_{a/\hat{b}} \circ g_{b/\hat{a}}=Id_{\hat{a}}$ und b) $g_{b/\hat{a}} \circ f_{a/\hat{b}}=Id_{\hat{b}}$.

Zunächst beweist man analog zu Lemma 3,daß $g_b(\langle t,a\rangle)=\langle t-d_t(a,b),b\rangle$ ist.Hiermit und mit Lemma 3) rechnen wir:
$f_{a/\hat{b}}(g_{b/\hat{a}}(\langle t,a\rangle))=f_{a/\hat{b}}(\langle t-d_t(a,b),b\rangle)=$
$\langle t-d_t(a,b)+d_{t-d_t(a,b)}(b,a),a\rangle=\langle t-d_t(a,b)+d_t(b,a),a\rangle=\langle t,a\rangle$
wegen (*).Im Fall b) rechnet man genauso.

DIV-6-3): Nach Voraussetzung ist für alle t:$\langle R;\underline{zw}_{d,t},\equiv_{d,t}\rangle$ $\in M(GEO)$.Nach DIV-7-4) und Teil B) ist aber $\langle R;\underline{zw}_{d,t},\equiv_{d,t}\rangle=\langle W;\underline{zw}_x,\equiv_x\rangle$ und folglich auch letztere Struktur ein Modell der Geometrie.

DIV-6-4): (ÜIV-20).

DIV-6-5): Sei nach Voraussetzung $\langle t,a\rangle\in a$ und $\langle t',a\rangle\in a$ gegeben mit $\langle t,a\rangle\prec\langle t',a\rangle$.Es folgt $t<t'$.Sei t_0 so,daß $t<t_0<t'$. Da nach Voraussetzung $\langle R;\underline{zw}_{d,t},\equiv_{d,t}\rangle\in M(GEO)$,gibt es $b\in R$ mit $b\neq a$,sodaß $d_t(a,b)\leq 1/2(t_0-t)$.Wir setzen v:=b.Dann ist $f_a(f_b(\langle t,a\rangle))=\langle t+2d_t(a,b),a\rangle\prec\langle t',a\rangle$.

DIV-6-6): Wie DIV-6-4).

DIV-6-7): Für $u\in W$ hat nach Definition $\hat{u}$ die Form $\hat{u}=\{\langle t,u\rangle/t\in\mathbb{R}\}$ und $\langle t,u\rangle\prec\langle t',u\rangle$ gilt in $\hat{u}$ genau dann,wenn $t<t'$.Folglich ist die Abbildung $\varphi:\mathbb{R}\to\hat{u}$,definiert durch $\varphi(t):=\langle t,u\rangle$ eine Bijektion,die $<$ in $\prec$ überführt.Die Separabilität von $\prec$ folgt dann mittels φ aus der von $<$ (in $\mathbb{R}$ bilden die rationalen Zahlen eine abzählbare Teilmenge der gewünschten Art und als D wähle man das Bild der rationalen Zahlen unter φ).

DIV-6-8): Es gelte $f_u(f_v(e))=f_u(e)$ mit $e=\langle t,u'\rangle\in u'$.Nach Lemma 3 und (*) erhält man $d_t(u',v)+d_t(v,u)=d_t(u',u)$,also nach DIII-4): $\underline{zw}_{d,t}(u,v,u')$.Nach Teil B) gilt aber $x\,\mathcal{S}\,x'$ und daher nach DIV-7-4): $\underline{zw}_{x'}(u,v,u')$. Q.E.D.

Intuitiv besagt das Theorem zweierlei.Erstens,daß sich die Axiome der klassischen Raum-Zeit-Theorie aus denen der SRZ nach Vermittlung von $\mathcal{S}$ ableiten lassen.Natürlich ist dies nur eine intuitive Formulierung,denn Ableitungsbeziehungen bestehen zwischen Sätzen und nicht zwischen Modellen.Trotzdem trifft die Vorstellung der Ableitung den Sachverhalt ziemlich gut.Stellen wir uns vor,beide Theorien seien in einem passenden formalen System durch Axiome gegeben,sodaß diese Axiome genau in allen Modellen erfüllt sind.Dann läßt sich TIV-5a) wie folgt deuten."$x' \in M(SRZ)$" heißt,daß die Axiome von SRZ gelten und "$x \varsigma x'$ " heißt,daß diese Axiome in andere Sätze "übersetzt" werden,die in der Sprache der klassischen Theorie formuliert sind.Aus letzteren Sätzen läßt sich nun ableiten, daß auch die Axiome der klassischen Theorie gelten (wodurch zum Ausdruck kommt,daß x ein Modell der klassischen Raum-Zeit-Theorie ist).Es ist nicht völlig klar,ob man diese intuitiven Überlegungen bei Zugrundelegung geeigneter Sprachen tatsächlich beweisen kann.Aber selbst wenn ein Beweis nicht gelingt,so kann dies nur an "reparierbaren" Kleinigkeiten liegen,nicht jedoch an der zentralen Idee.Wir wollen also TIV-5a) so auffassen,daß es die Ableitung (nach Übersetzung) der klassischen Theorie aus der SRZ beinhaltet.

Der zweite Teil des Theorems betrifft mehr den Begriff der Übersetzung.Da wir an ς keine diesbezüglichen Forderungen gestellt haben,ist nicht gesichert,daß ς ein wichtige Eigenschaft von Übersetzungen hat,nämlich daß jeder Ausdruck übersetzbar ist.Es könnte sein,daß ς nicht alle Modelle der klassischen Theorie mit solchen der SRZ in Verbindung bringt. Das heißt,es könnte Modelle x der klassischen Theorie geben, sodaß für kein $x' \in M(SRZ)$ gilt: $x \varsigma x'$.In diesem Fall würde die "Ableitungsaussage" von Teil a) nicht mehr greifen,weil dort $x \varsigma x'$ vorausgesetzt werden muß.Man kann in einem solchen Fall nicht mehr sagen,daß die Axiome,die in x gelten,sich aus denen von SRZ ableiten lassen.Diese mißliche Situation wird durch TIV-5b) verhindert.Man kann eben beweisen,daß es zu jedem klassischen Modell x eine "Übersetzung" x' gibt ($x \varsigma x'$),welche auch ein Modell der SRZ ist.Die Zusatzforderung der "Starrheit" (d.h. $d_t = d_{t'}$ für alle t,t') stört hier nur formal,da sie in der Praxis durch die Wahl einer Maßeinheit,d.h.durch Konvention immer erfüllt ist.Wir hätten die Starrheit schon in Modellen der klassischen Raum-Zeit-Theorie fordern können.Aber dann würde Teil a) des Satzes nicht mehr in der vorliegenden Form gelten.Der tiefere Grund hierfür ist TIII-2),nach dem die Metrik d_t nur bis auf einen Faktor durch die geometrischen Relationen bestimmt ist.

Es ist zweckmäßig,sich den Inhalt von TIV-5) noch allgemeiner vorzustellen und zwar unter dem Aspekt des "Hineinkonstruierens einer Struktur in eine andere".Nehmen wir an,wir haben ein Modell der SRZ vor uns und es gelingt,in diesem Modell eine andere Struktur zu definieren,zu "konstruieren", sodaß sich herausstellt,daß diese neue Struktur die Axiome der klassischen Raum-Zeit-Theorie erfüllt.Wenn uns dies in allen Modellen der SRZ gelingt,dann kann man mit Recht sagen, die Modelle der SRZ seien reicher als die der klassischen Raum-Zeit-Theorie.TIV-5) bringt eine etwas schwächere Version dieses Sachverhalts zum Ausdruck.Denn daß wir aus x' ein x konstruieren können,läßt sich durch $x \varrho x'$ umschreiben und TIV-5) besagt,daß diese Konstruktion vielleicht nicht in allen x' gelingt,aber doch jedenfalls in so vielen,daß dabei alle klassischen Modelle x entstehen.Unter diesem Aspekt läßt sich TIV-5) wie folgt umschreiben.Zu jedem Modell x der klassischen Theorie gibt es ein Modell x' der SRZ,sodaß sich x aus x' heraus konstruieren läßt.

Es ist wichtig,daß unsere Übersetzungsrelation ϱ in der umgekehrten Richtung,also von SRZ in die klassische Raum-Zeit-Theorie,diese Eigenschaft nicht hat.Es gilt nämlich der folgende Satz.

TIV-6 Nicht zu jedem $x' \in M(SRZ)$ gibt es ein x,sodaß $x \varrho x'$ und x ein Modell der klassischen Raum-Zeit-Theorie ist

Zum Beweis braucht man sich nur klarzumachen,daß ϱ zum Beispiel den Ereignissen von E die Form von Paaren <t,a> aufzwingt.Wenn also in x' die Ereignismenge E nicht als Menge von geordneten Paaren gegeben ist,so kann $x \varrho x'$ nicht gelten.Und sicher gibt es unter den Modellen der SRZ solche,deren Ereignisse keine Paare sind.Wir geben zu,daß sich diese Beweisidee nicht in der formalen Mengenlehre ohne Urelemente nachvollziehen läßt.Der entscheidende Punkt ist,ob man die Ereignisse der SRZ als "letzte Bausteine" ansieht,die sich nicht weiter analysieren lassen,oder ob man es für möglich hält,jedes Ereignis weiter in "klassische" Raum- und Zeitpunkte auflösen zu können.Die zur Zeit in der Physik vorherrschende Meinung ist wohl die,Ereignisse als nicht weiter analysierbare Grundbausteine anzusehen und mindestens im Licht dieser Meinung gibt TIV-6) eine klare Aussage.

Die Relation ς ist in diesem Sinn nicht symmetrisch. Sie zeichnet durch TIV-5) die SRZ als formal reichere und damit fortschrittliche ("bessere") Theorie gegenüber der klassischen Raum-Zeit-Theorie aus und nach TIV-6) ist die Umkehrung falsch. Das heißt, der "Fortschritt" ist "echt". Natürlich ist damit nicht gemeint, man habe durch diese Feststellung den ganzen Gehalt der Aussage, die SRZ sei "fortschrittlicher als" die klassische Theorie, erfaßt. Aber das derzeit größte Problem mit dem Begriff des Fortschritts ist, daß seine verschiedenen Aspekte -mit Ausnahme des hier angesprochenen- nur einer sehr vagen Analyse zugänglich sind. Lediglich der hier im Vordergrund stehende <u>rein</u> formale Aspekt der formalen Vergleichbarkeit läßt Aussagen zu, die man nicht im Lichte neuer Diskussionen zurückzunehmen braucht. TIV-5) ist streng bewiesen und kann auch durch die beste Rhetorik nicht wegdiskutiert werden. Wir geben gerne zu, daß eine solch formale Beziehung den "philosophischen" Aspekt, der die verschiedene Bedeutung in beiden Theorien betrifft, nicht erfaßt, ja kaum berührt. Wir sehen darin aber weniger einen Einwand gegen unser Vorgehen, als mehr einen Einwand gegen das "philosophische" Vorgehen, das sich auf einen unexplizierten Bedeutungsbegriff stützt und, solange es dabei verbleibt, notwendigerweise nicht zu allgemein akzeptierbaren Resultaten kommt.

Man könnte noch eine stärkere Fassung des formalen Aspekts von Fortschritt bedenken, in der man fordert, daß TIV-5) für ς erfüllt ist, daß sich die Umkerhung von TIV-5) aber für kein ς' erfüllen läßt. Allerdings ist diese letztere Formulierung sehr unübersichtlich, da sie einen Überblick über alle möglichen Übersetzungsrelationen ς' voraussetzt.

Unsere Analyse zeigt jedenfalls, daß ein Vergleich der klassischen und der speziell relativistischen Raum-Zeit-Theorien möglich ist, daß nicht zu sehen ist, wo hier Inkommensurabilität vorliegen soll und daß auch zum Vergleich kein "Grenzübergang" vorgenommen werden muß.

GLEICHZEITIGKEIT

Es ist aufschlußreich, den Begriff der Gleichzeitigkeit in der klassischen und der relativistischen Theorie zu vergleichen, weil man an diesem Begriff den Unterschied zwischen beiden Theorien sehr schön sehen kann. Wir fragen uns dazu, wie man in Modellen oder potentiellen Modellen beider Theorien die Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse definieren kann. Zwar kommen in der klassischen Theorie Ereignisse nicht als Grundobjekte vor, aber unter Berücksichtigung des letzten Abschnitts ist klar, daß man Ereignisse als definierte Entitäten zur Verfügung hat. Die Definition lautet genau:

> x ist ein Ereignis in einem potentiellen Modell der klassischen Raum-Zeit-Theorie gdw es einen Zeitpunkt $t \in Z$ und einen Raumpunkt $a \in R$ gibt, sodaß $x = \langle t, a \rangle$.

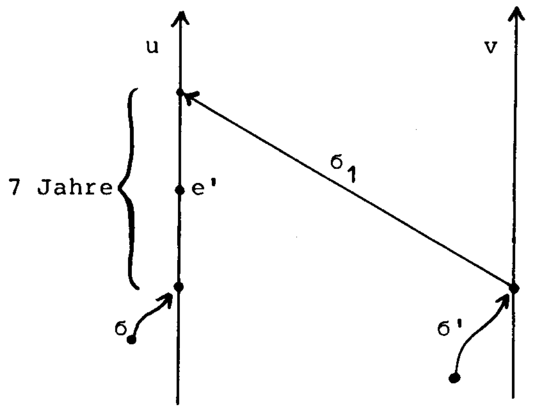
Wenn man Ereignisse so definiert, dann liegt es auf der Hand, zwei Ereignisse $\langle t,a \rangle$ und $\langle t',b \rangle$ genau dann als gleichzeitig anzusehen, wenn $t=t'$ gilt. Wenn jedes Ereignis durch einen Zeitpunkt "mitkonstituiert" ist, dann wird man bei Definition der Gleichzeitigkeit eben auf diese Zeitpunkte zurückgreifen. Die Definition der Gleichzeitigkeit ist in der klassischen Theorie somit unproblematisch. Zwei "klassische Ereignisse" $\langle t,a \rangle$, $\langle t',b \rangle$ sind gleichzeitig, wenn gilt $t=t'$. Im Bild z.B. von Figur 22) bedeutet dies, daß beide Ereignisse in der gleichen zeitlichen Ebene, nämlich in E_t ($=E_{t'}$) liegen. Man überzeugt sich sofort, daß alle und nur die Ereignisse, die in einer Ebene E_t liegen, im Sinne der gerade gegebenen Definition gleichzeitig sind. Daher werden die Ebenen E_t auch als Gleichzeitigkeitsebenen bezeichnet.

Betrachten wir nun die Situation in der SRZ. Wie können wir hier definieren, daß zwei räumlich entfernte Ereignisse, d.h. Ereignisse auf verschiedenen u und v gleichzeitig sind? Da die Ereignisse nicht, wie in der klassischen Theorie, "absolute" Zeitpunkte "mit sich herumtragen", müssen wir fragen, wie man die Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse feststellen kann.

Betrachten wir dazu das Beispiel zweier Raumschiffe mit

Bahnen $\hat{u}$ und $\hat{v}$ (siehe Figur 49).

Fig.49



Wie kann man feststellen,daß z.B. zwei Signale σ und σ' gleichzeitig in u und v ankommen? Wenn die Raumstationen weit voneinander entfernt sind (z.B. 7 Lichtjahre),so ist es unmöglich,"direkt",durch "Hinschauen" Gleichzeitigkeit festzustellen.Nehmen wir an,wir sitzen in Raumschiff u.Wie können wir herausfinden,ob das Signal σ' in v zur gleichen Zeit ankommt, wie das Signal σ in u?

Ein mögliches Verfahren besteht darin,daß von v sofort nach Eingang des Signals σ' ein Funkspruch σ_1 an u abgesandt wird. Dieser trifft genau 7 Jahre später in u ein.Wenn wir wissen, daß u genau 7 Lichtjahre von v entfernt ist,dann können wir mit der Formel "Geschwindigkeit ist Weg durch Zeit" die Zeit ausrechnen,die σ_1 gebraucht hat (7 Jahre).Wenn wir nun genau vor 7 Jahren auch σ empfangen haben,so können wir sagen, σ und σ' seien gleichzeitig.Diese Festlegung ist zwar sehr natürlich,aber nicht so zwingend vorgeschrieben wie im klassischen Fall.Denn in die Festsetzung gehen Voraussetzungen über das Verhalten des Lichts ein.Wir setzen voraus,daß sich das Licht in allen Gebieten des Raumes mit gleicher Geschwindigkeit fortpflanzt.Im Prinzip könnten wir auch andere Festsetzungen treffen,nämlich z.B.,daß jenes Ereignis e',das vom Empfang von σ_1 um genau die halbe Reisezeit von σ_1 zurückliegt,mit der Ankunft von σ' gleichzeitig ist.Bei einer derartigen Festsetzung kämen wir nie in Konflikt mit unseren Erfahrungen.Sie wäre also genauso zulässig, allerdings nicht so natürlich, wie die erste.

Wenn in dem betrachteten Beispiel das Signal nicht von u ausgesandt wurde, so weiß man in u zunächst gar nicht von ihm. Um zu einer praktikablen Definition zu gelangen, wird man fordern, daß statt eines beliebigen σ' ein Lichtsignal von u nach v zu betrachten ist. Man erhält dann die folgende Formulierung, die (in etwas abgewandelter Form) von Einstein [Einstein, 1905] vorgeschlagen wurde.

<u>DIV-8</u> Sei $x \in M_p(SRZ)$, $u \in W$, $e, e' \in E$ und $e \prec u$.
e und e' heißen <u>gleichzeitig</u> gdw $e=e'$ oder es gibt $v \in W$ und $e_1, e_2 \in \hat{u}$, sodaß gilt
1) $e' \in \hat{v}$
2) $e_1 \prec e$ und $e \prec e_2$
3) $e'=f_v(e_1)$ und $e_2=f_u(e')$
4) $\Phi(e)=1/2(\Phi(e_2)+\Phi(e_1))$

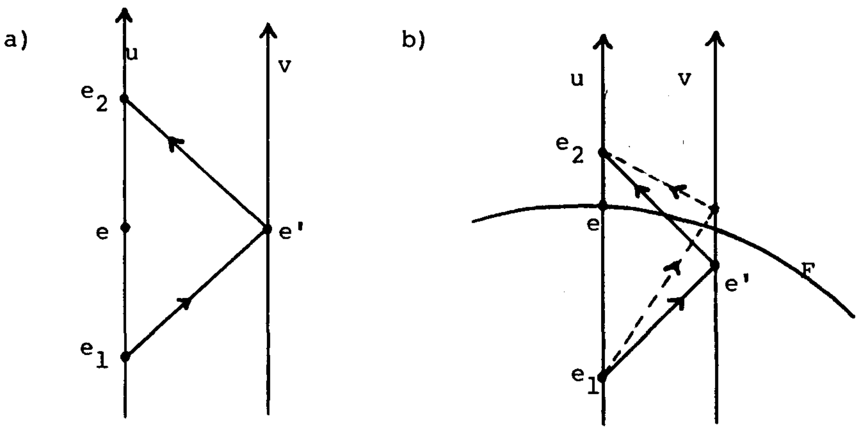
Φ bezeichnet hierbei eine Zeitskala auf $\hat{u}$. Man stellt sich Φ am besten als eine Uhr vor, die jedem Ereignis auf $\hat{u}$ eine reelle Zahl, nämlich die von der Uhr angezeigte Zeit, zuordnet. Um die Gleichzeitigkeit von e und e' herauszubekommen, muß man ein Lichtsignal so von u absenden, daß es genau bei e' in v ankommt, von wo es direkt nach u zurückgesandt wird. Dem Abgangsereignis e_1 und dem Ankunftsereignis e_2 in u werden Zeitpunkte zugeordnet (etwa durch Ablesen einer Uhr) und die Zeitspanne zwischen e_1 und e_2 ($\Phi(e_2)-\Phi(e_1)$) wird halbiert. Das zum Zeitpunkt

$$\Phi(e_1)+1/2(\Phi(e_2)-\Phi(e_1)) \qquad (= 1/2(\Phi(e_1)+\Phi(e_2)))$$

auf $\hat{u}$ stattfindende Ereignis e ist dann gleichzeitig zu e' (siehe Figur 50). Oder anders, wenn e gegeben ist: e ist mit e' gleichzeitig, wenn die beschriebene Prozedur zeigt, daß die bei e angezeigte Zeit $\Phi(e)$ gerade $1/2(\Phi(e_1)+\Phi(e_2))$ ist. Natürlich muß man großes Glück haben, wenn man ein Signal von u so absendet, daß es genau bei e' in v ankommt. Aber diese Schwierigkeit läßt sich umgehen, indem man in kurzen Abständen ständig Lichtsignale von u nach v sendet. Irgendeines von diesen wird hinreichend nahe bei e' in v ankommen, sodaß das Verfahren praktisch funktionieren kann.

Die oben angedeutete Möglichkeit einer alternativen Festlegung läßt sich im Bild wie folgt darstellen (siehe Figur 50).

Fig.50



Statt wie in Figur 50) die Zeitspanne zwischen e_1 und e_2 zu halbieren,könnte man,wie in b) dargestellt,irgendein anderes zwischen e_1 und e_2 liegendes Ereignis e auf $\hat{u}$ als mit e' gleichzeitig ansehen.Dies könnte man etwa dadurch rechtfertigen,daß man verschiedene Geschwindigkeiten für das Licht ansetzt,eine langsamere von e_1 nach e' und eine schnellere von e' nach e_2 (siehe die gestrichelten Bahnen in Figur 50).Außer Einfachheitsüberlegungen gibt es keine Hinweise aus der Erfahrung,die eine Bevorzugung von a) nahelegen.

Stellen wir uns die Sache im Bild mit Lichtkegeln vor,so zeigt die Anwendung von Figur 50),daß zum Ereignis e jedes andere Ereignis e',das <u>nicht</u> im Lichtkegel von e liegt,bei geeigneter Gleichzeitigkeitsdefinition gemäß Figur 50b) als zu e gleichzeitig angesehen werden kann (ÜIV-21).Wenn wir einmal eine bestimmte Gleichzeitigkeitsdefinition gewählt haben,dann wird dadurch im Komplement des Lichtkegels eine "Gleichzeitigkeitsfläche" (die keine Ebene zu sein braucht) wie in Figur 50b) durch F dargestellt,ausgezeichnet.Aber welche derartige Fläche wir wählen,ist nicht durch die Erfahrung vorgeschrieben.Insofern kann man sagen,daß in Modellen der SRZ keine Gleichzeitigkeitsebenen ausgezeichnet sind,sondern lediglich

Mengen möglicher Gleichzeitigkeitsflächen,die im Komplement der Lichtkegel liegen.In gewisser Weise entspricht also den Gleichzeitigkeitsebenen E_t der klassischen Theorie in der SRZ das Komplement des Lichtkegels.Allerdings ist die Entsprechung nur "relativ" zum fest vorgegebenen Ausgangsereignis e des Lichtkegels sinnvoll.Für andere Ereignisse hat man ja andere Lichtkegel und eventuell auch andere Uhren,sodaß möglicherweise ganz andere Gleichzeitigkeitsflächen entstehen.Hier sei nur erwähnt,daß dieser Umstand den Namen "Relativitätstheorie" rechtfertigt.Denn die ganzen Überlegungen gelten zunächst nur relativ zum Beobachter,der sich an einem bestimmten Ort (d.h. auf einer bestimmten Bahn) befindet.Auf die Phänomene,die diesen Namen in überzeugenderer Weise rechtfertigen,nämlich Zeitdilatation und Längenkontraktion,sowie auf das Relativitätsprinzip,werden wir in diesem Buch nicht eingehen.

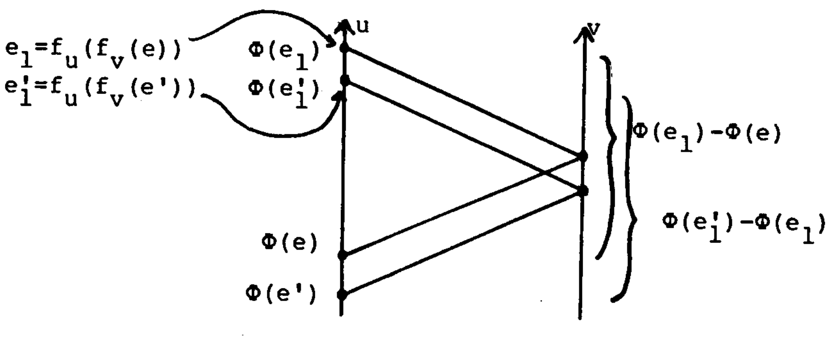
Im Anschluß an DIV-8) kann man fragen,ob denn nicht die dort auftretende Zeitskala Φ eine weitere Unbestimmtheit in die Gleichzeitigkeit hineinbringt.Denn je nachdem,wie Φ (eine beliebig gegebene Uhr) beschaffen ist,wird man in DIV-8) andere Resultate erhalten.Die Uhr könnte z.B.in Figur 50) nach dem Ereignis e_1 zunächst relativ schnell laufen,aber dann,im letzten Abschnitt vor e_2 immer langsamer werden (bei einer mechanischen Uhr etwa in Folge von Verschmutzung).Bei einer solchen Uhr würde das mit e' als gleichzeitig definierte Ereignis e nicht "in der Mitte" zwischen e_1 und e_2 liegen,sondern näher an e_2.Bei einer anderen Uhr Φ',die zunächst langsamer geht,jedoch dann immer schneller wird,erhielte man das umgekehrte Resultat: das gleichzeitige Ereignis e würde dann näher an e_1 liegen.

Diese Unbestimmtheit kann man ausschließen,indem man den Gang der Uhren an die Axiome der SRZ "ankoppelt".Dazu müssen wir zunächst in der Sprache der SRZ sagen,was eine Uhr ist. Da wir zwischen "richtig gehenden" und "falsch gehenden" Uhren unterscheiden wollen,fragen wir zunächst,wie man eine "mögliche" Uhr,die eventuell auch falsch gehen darf,beschreiben kann.Das geht ganz einfach,nämlich durch eine beliebige Funktion Φ,die jedem Ereignis einer Bahn $\hat{u}$ eine reelle Zahl zuordnet. Wir können uns diese Funktion, wie schon angedeutet, so vorstellen, daß man in u eine reale Uhr laufen läßt und zu jedem Ereignis $e \prec u$ die Uhrzeit in Form einer reellen Zahl an der Uhr abliest. Solange Φ eine beliebige Funktion sein darf, lassen sich damit auch die verrücktesten Uhren beschreiben. Zum Beispiel kann eine Uhr erst vorwärts und nach einiger Zeit "rückwärts" gehen, oder "springen", indem sie zwei "benachbarten" Ereignissen ganz verschiedene Uhrzeiten zuordnet. Aus all diesen möglichen Uhren muß man daher solche auswählen, die "richtig" gehen. Diese sollen sicherlich stetig laufen und ständig in die gleiche "zeitliche Richtung" gehen. Letztere Bedingung kann man so ausdrücken, daß die Kleinerrelation, die zwischen den Funktionswerten von Φ (Uhrzeiten) definiert ist, die Kausalrelation $\prec$ auf $\hat{u}$ erhält, das heißt genauer, daß für $e, e' \in \hat{u}$ gilt:

$$e \prec e' \quad \text{gdw} \quad \Phi(e) < \Phi(e').$$

Es läßt sich beweisen, daß wenn Φ diese Forderung erfüllt, Φ auch schon stetig sein muß. Wir brauchen die Stetigkeit also nicht eigens zu fordern (ÜIV-22). Trotzdem ist die Forderung noch relativ schwach, denn sie schließt immer noch Uhren ein, die "verschiedene Ganggeschwindigkeiten" relativ zueinander haben. Aber auch diese kann man durch Rückgriff auf Modelleigenschaften eliminieren. Und zwar verlangt man, daß die Zeitabstände, die man durch Messung mit einer Uhr auf $\hat{u}$ erhält, wenn man ein Lichtsignal von u aussendet und nach Reflektion an einem festen Punkt v wieder empfängt, unabhängig davon sind, wann man das Lichtsignal aussendet (siehe Figur 51).

Fig.51



Es wird einmal bei Ereignis e,das zur Zeit $\Phi(e)$ stattfindet, ein Lichtsignal nach v abgesandt,dort reflektiert und die Ankunftszeit $\Phi(f_u(f_v(e)))$ notiert.Die Differenz beider Zeiten wird festgehalten.Genau das gleiche kann man auch von einem anderen Ereignis e' aus tun und man erhält als Zeitdifferenz bei gleichem v den Ausdruck $\Phi(f_u(f_v(e')))-\Phi(e')$.Die Forderung ist nun,daß für jedes v die zu zwei Ereignissen e,e' so erhaltenen Differenzen gleich sind.Eine Uhr,die diese Forderung erfüllt,muß ständig gleiche Ganggeschwindigkeit haben.Das heißt genauer,daß alle Uhren,die diese Forderung erfüllen, relativ zueinander gleiche Gangverhältnisse aufweisen.Und dies wiederum bedeutet,daß je zwei solche Uhren miteinander durch eine lineare Transformation verbunden sind,also daß gilt:

$$\Phi(e)=\alpha\cdot\Phi'(e)+\beta \qquad \text{mit} \quad \alpha\in\mathbb{R}^+ \text{ und } \beta\in\mathbb{R}.$$

Den Beweis dieses Sachverhaltes wollen wir unterdrücken,da er ziemlich kompliziert ist.Wir verweisen auf [Kamlah,1979], S.448 ff. Das entsprechende Theorem sei aber genau formuliert.

<u>TIV-7</u> Es sei $x\in M(SRZ)$ und $u\in W$.Dann gibt es eine Funktion $\Phi:\hat{u}\rightarrow\mathbb{R}$,sodaß für alle $v\in W$ und alle $e,e'\in\hat{u}$:

1) $e\prec e'$ gdw $\Phi(e)<\Phi(e')$
2) $\Phi(f_u(f_v(e)))-\Phi(e)=\Phi(f_u(f_v(e')))-\Phi(e')$.

Erfüllt weiter $\Phi':\hat{u}\rightarrow\mathbb{R}$ diese Forderungen 1) und 2),so gibt es $\alpha\in\mathbb{R}^+$ und $\beta\in\mathbb{R}$,sodaß für alle $e\in\hat{u}$: $\Phi(e)=\alpha\cdot\Phi'(e)+\beta$

Es ist demzufolge möglich,in Modellen der SRZ relativ zueinander konstant gehende Uhren auszuzeichnen.Wenn man sich in der Gleichzeitigkeitsdefinition DIV-8) auf eine solche Uhr bezieht,so verschwinden eventuelle Unbestimmtheiten der Gleichzeitigkeit,die durch verschieden gehende Uhren hervorgerufen werden könnten.

Auch in der SRZ kann man Koordinatensysteme einführen.Für den räumlichen Anteil eines Modells läßt sich ein räumliches Koordinatensystem wie in der klassischen Theorie durch vier Raumpunkte (d.h.Dinge $u_o,..,u_3\in W$) einführen,sodaß die Verbindungsgeraden zwischen u_i und u_o (i=1,2,3, "Verbindungsgerade" als definiert im geometrischen Modell $<W;\underline{zw}_x,\equiv_x>$), rechte Winkel miteinander bilden.Man kann in einem Modell der

Geometrie auch ohne Satz des Pythagoras rechte Winkel definieren, allerdings auf recht umständliche Weise. Dies ist im Detail durchgeführt etwa in [Borsuk & Szmielew, 1960], S.55 ff. und S.114 ff.

Im zeitlichen Anteil eines Modells kann man in einer beliebigen Bahn -zweckmäßigerweise nimmt man u_o- zwei Ereignisse e_o, e_1 mit $e_o \prec e_1$ fixieren, sodaß e_o als Zeitnullpunkt dient (etwa wie das Ereignis "Christi Geburt") und e_1 zur Festsetzung der Zeiteinheit ("eine Stunde nach Christi Geburt"). Nach TIV-7) ist eine Zeitskala Φ auf $\hat{u}_o$ eindeutig durch die im Theorem gegebenen Bedingungen bestimmt, wenn man festsetzt, daß $\Phi(e_o)=0$ und $\Phi(e_1)=1$ sein soll. Ein raum-zeitliches Koordinatensystem hat dann die Form $K=\langle u_o,..,u_3,e_o,e_1\rangle$, wobei $e_o, e_1 \in \hat{u}_o$ und $e_o \prec e_1$. Wenn wir in einem Modell ein solches Koordinatensystem fixieren, so gibt es dazu genau eine "räumliche" Abstandsfunktion $d: W \times W \rightarrow \mathbb{R}_o^+$, die mit $\underline{zw}_x$ und $\equiv_x$ in der natürlichen Beziehung von DIII-4) steht. Denn in jedem Modell der Geometrie gibt es bis auf einen Faktor genau eine solche Funktion und die Bedingungen an das Koordinatensystem $\langle u_o,..,u_3\rangle$ enthalten in Form der Normierung $d(u_o,u_i)=1$ für $i=1,2,3$ Aussagen, die den Unbestimmtheitsfaktor ebenfalls festlegen.

Die Koordinaten eines beliebigen Ereignisses e lassen sich relativ zu einem solchen Koordinatensystem K wie folgt ermitteln. Zunächst liegt e auf genau einem $v \in W$. Die räumlichen Koordinaten von v relativ zu $\langle u_o,..,u_3\rangle$ ermittelt man wie in der Geometrie, indem man von v Lote auf die drei Koordinatenachsen fällt und die Abstände der so erhaltenen Fußpunkte zu u_o ermittelt. Die hier angesprochenen Abstände sind dann durch die gerade erwähnte Funktion d, deren Eindeutigkeit relativ zu K durch Beweis gesichert ist, gegeben. Allerdings können wir uns diese Operationen in der SRZ nur anschaulich vorstellen, wenn wir die Bahnen auf eine Ebene projizieren. Damit haben wir dem Ereignis e schon drei räumliche Koordinaten zugeordnet. Die vierte, zeitliche Koordinate erhält man, indem man das auf u_o zu e gleichzeitige Ereignis e' mittels DIV-8) bestimmt. Die Zeitkoordinate von e relativ zu K ist dann gegeben durch

$$\Phi(e') - \Phi(e_o) \quad (= \Phi(e')).$$

Ein letzter interessanter Unterschied zwischen der SRZ und der klassischen Theorie betrifft die Bahnen von Lichtsignalen.Es ist klar,daß man in Modellen beider Theorien so etwas wie Bahnen von Dingen,die keine Raumpunkte sind,die sich also eventuell bewegen,definieren kann.In der klassischen Theorie ist eine solche Bahn einfach eine geeignete Teilmenge der Menge aller Paare $<t,a>$.In der SRZ ist eine Bahn Teilmenge von E.Der Unterschied besteht darin,daß in der SRZ die Bahnen von Lichtsignalen sich in der Klasse aller möglichen Bahnen direkt auszeichnen lassen,was in der klassischen Theorie ohne Benutzung zusätzlicher Annahmen nicht geht.Überlegen wir zunächst,wie man in der SRZ eine Lichtbahn,d.h.die Bahn eines Lichtsignals,definieren kann.Es ist dies einfach eine Menge von Ereignissen,welche alle miteinander durch Funktionen f_u (mit variablem u) verknüpft sind.Genauer kann man definieren:

> x ist eine Lichtbahn gdw es $X \subseteq E$ gibt,sodaß X bezüglich $\prec$ dicht und stetig ist und für alle $e,e' \in X$ gilt: wenn $e \neq e'$,dann gibt es $u,v \in W$,sodaß $e=f_u(e')$ oder $e'=f_v(e)$.

Je zwei Ereignisse auf der Lichtbahn lassen sich also durch ein Lichtsignal miteinander verbinden.Anschaulich kann man sich -muß aber nicht- die Bahnen als Linien vorstellen,die immer am Rand von irgendwelchen Lichtkegeln liegen,wobei "Knicke",d.h.Richtungsänderungen erlaubt sind,aber die Linien, abgesehen won solchen Knicken,gerade sind.

In der klassischen Theorie können wir solche Bahnen auch beschreiben,aber nur mit zusätzlichen Annahmen.Wir müssen zunächst ausschließen,daß die räumlichen Abstände zu verschiedenen Zeiten verschieden sind (vergleiche DIII-6),was durch die Zusatzforderung erreicht wird,daß $d_t=d_{t'}$ für alle $t,t' \in Z$. Dann kann man "Steigung" definieren,indem man Verhältnisse von räumlichen und zeitlichen Abständen vergleicht.Die Steigung einer Geraden,die durch die "Ereignisse" $<t,a>$ und $<t',b>$ geht,ist gegeben durch $d(t,a,b)/|t'-t|$.Den Lichtbahnen in der SRZ entsprechen dann Mengen X von Paaren $<t,a>$ mit folgenden

Eigenschaften: 1) zu jedem $t \in Z$ enthält X genau ein Paar $\langle t,a \rangle$, 2) die Steigung zwischen je zwei Elementen von X ist eine Konstante,z.B.1 .Für eine genaue Analogie muß man auch noch Knicke zulassen,aber das erfordert eine etwas umständliche Definition.Man sieht auf jeden Fall,daß die Auszeichnung von Lichtbahnen in der klassischen Theorie nur unter Zusatzannahmen und unter Bezugnahme auf außerhalb der Modelle vorkommende Entitäten (wie die Konstante) möglich ist.In der SRZ hingegen kann die Auszeichnung ohne Zusatzannahmen und ohne Rückgriff auf neue,d.h.nicht in den Modellen vorhandene oder definierbare Entitäten vorgenommen werden.Das kommt von der $\prec$ -Relation,die schon alle möglichen Informationen über Lichtbahnen enthält.

SR-KINEMATIK

Genau wie die klassische Raum-Zeit-Theorie ist auch die SRZ eine recht uninteressante Theorie,denn sie charakterisiert auch wieder nur einen "starren" raum-zeitlichen Rahmen,in dem man Bewegung nicht ohne Zusätze ausdrücken kann.Und wie im klassischen Fall gelangen wir hier zu einer kinematischen Theorie,d.h.zu einer Theorie,in der sich Bewegungen erfassen und beschreiben lassen,erst dadurch,daß wir in einen gegebenen Raum-Zeit-Rahmen (ein Modell der SRZ) neue Teilchen "hineinsetzen",die sich in dieser Raum-Zeit-Arena bewegen können.Das geschieht wieder durch eine Funktion i,die jedem Teilchen dessen Bahn als Ereignismenge zuordnet.Formal kann man die Sache sogar noch einfacher darstellen,indem man i einfach als Menge von Paaren $\langle p,e \rangle$ ansetzt,wobei p ein Teilchen,e ein Ereignis ist und e auf der Bahn von p liegt.Wir erhalten folgende Definition.

DIV-9 x ist eine SR-Kinematik ($x \in M(\text{SR-KIN})$) gdw es $E,W,P,<,\prec$ und i gibt,sodaß

1) $x = \langle E,W,P;<,\prec,i \rangle$
2) $\langle E,W;<,\prec \rangle \in M(\text{SRZ})$
3) P ist eine endliche,nicht-leere Menge (von Partikeln)
4) $i \subseteq P \times E$ (Partikelbahnen)

5) für alle $p \in P$: $i_p := \{e \in E / \langle p,e \rangle \in i\}$ ist linear geordnet, stetig und separabel bezüglich $\prec$

6) für alle p und alle $e, e' \in i_p$: $e=e'$ oder $e \rightsquigarrow e'$ oder $e' \rightsquigarrow e$

7) für alle $p, p' \in P$: wenn $p \neq p'$, dann $i_p \cap i_{p'} = \emptyset$

Hierbei ist i_p in 5) definiert als die Menge der zu p in der Relation i stehenden Ereignisse, also $i_p = \{e \in E / \langle p,e \rangle \in i\}$. Eine solche Ereignismenge soll gerade die Bahn des Teilchens p wiedergeben. Bedingung 5) fordert, daß die $\prec$ -Relation, wenn man sie nur für Ereignisse auf der Bahn i_p betrachtet, eine lineare Ordnung ist, die darüber hinaus dicht, stetig und separabel sein soll. Bedingung 6) beinhaltet, daß die Bahn i_p keine Lichtbahn ist. Das heißt, p darf sich nicht mit Lichtgeschwindigkeit, sondern nur mit kleinerer Geschwindigkeit bewegen. Nur für solche Bahnen ist 6) erfüllt. Denn nur bei Unter-Lichtgeschwindigkeit kann man die beiden Ereignisse auf der Bahn durch die Relation $\rightsquigarrow$ miteinander verbinden. Die letzte Bedingung fordert, wie in der klassischen Theorie, daß zwei zu verschiedenen Teilchen gehörende Bahnen i_p und $i_{p'}$ sich nicht schneiden dürfen.

Der Übergang zur Kinematik läßt sich also in der relativistischen Theorie analog zu unserem Aufbau der klassischen Theorie durchführen. Es liegt nahe, zu untersuchen, ob sich die Reduktionsbeziehung zwischen den Raum-Zeit-Theorien auf die Kinematiken fortsetzen läßt. Wir müssen dazu nur die Übersetzungsrelation ϱ auf die Bahnen ausdehnen, was zunächst keine Probleme bereitet. Wir definieren versuchsweise eine Übersetzungsrelation ϱ_1 zwischen klassischen und relativistischen Kinematiken. Genausogut könnten wir ϱ_1 auch für potentielle Modelle definieren, aber da wir die potentiellen Modelle in der SR-Kinematik nicht brauchen werden, haben wir sie gar nicht erst eingeführt.

<u>DIV-10</u> Es seien $x = \langle R, Z, P; \diamond, d, i \rangle$ und $x' = \langle E, W, P; \leqslant, \prec, i' \rangle$ Modelle der klassischen bzw. der SR-Kinematik. Dann gelte

$x \ \varrho_1 \ x'$ gdw

1) $\langle R, Z; \diamond, d \rangle \ \varrho \ \langle E, W; \leqslant, \prec \rangle$

2) $P = P'$

3) für alle $p \in P$ und alle $e \in E$: $i'(p,e)$ gdw es $t \in Z$ gibt,

sodaß $e=\langle t,i(p,t)\rangle$

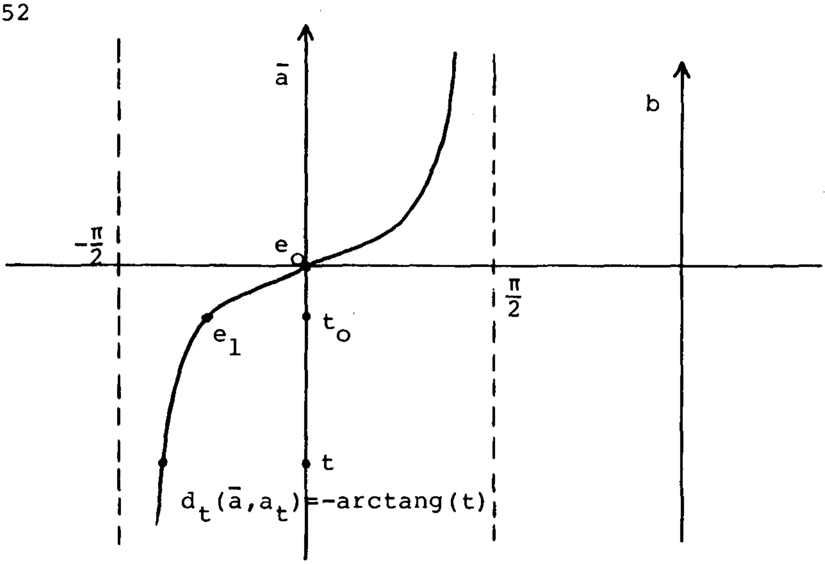
Diese erweiterte Übersetzungsrelation identifiziert die bewegten Teilchen beider Strukturen ($P=P'$) und fordert, daß sich die relativistischen Teilchenbahnen i'_p gemäß 3) als Mengen von Paaren der Form $\langle t,i(p,t)\rangle$ auffassen lassen. Mit anderen Worten: ein Ereignis e gehört zur Bahn i'_p gdw e die Form $\langle t,i(p,t)\rangle$ hat, wobei wir uns erinnern, daß durch Bedingung 1) jedes Ereignis von E die Form $\langle t,b\rangle$ mit $b\in R$ hat. Wegen $i(p,t) \in R$ ist 3) auch formal sinnvoll.

Man stellt nun aber fest, daß eine TIV-5b) entsprechende Aussage hier nicht mehr gilt. Das heißt: nicht zu jedem Modell x der klassischen Kinematik gibt es ein Modell x' der SR-Kinematik, sodaß $x \varrho_1 x'$ gilt. Nicht jedes Modell der klassischen Kinematik läßt sich also in ein speziell relativistisches Modell "hineinkonstruieren". Intuitiv liegt dies an den in klassischen Kinematiken zugelassenen beliebig hohen Geschwindigkeiten. Die Bahn i_p eines Teilchens im klassischen Modell darf beliebig hohe Geschwindigkeiten aufweisen. Sie kann sogar so beschaffen sein, daß das Teilchen unendlich schnell wird (ÜIV-23). In der SR-Kinematik ist dies aber durch DIV-9-6) ausgeschlossen. Wir erhalten folgenden Satz.

<u>TIV-8</u> Nicht zu jedem Modell x der klassischen Kinematik gibt es ein Modell x' der SR-Kinematik mit $x \varrho_1 x'$

Beweis: Sei x gegeben und so beschaffen, daß für alle t,t': $d_t=d_{t'}$ und so, daß es ein $p\in P$ gibt mit $i_p(t)=a_t$, wobei gelte: es gibt $b,\bar{a} \in R$, sodaß: (wenn $t<0$, dann $\underline{zw}_{d,t}(b,a_t,\bar{a})$ und $d_t(a_t,\bar{a})=-\mathrm{arctang}(t)$) und (wenn $t\geq 0$, dann $\underline{zw}_{d,t}(b,\bar{a},a_t)$ und $d_t(a_t,\bar{a})= \mathrm{arctang}(t)$). Dabei ist $\mathrm{arctang}: \mathbb{R}\rightarrow]-\pi/2,\pi/2[$ die Umkehrfunktion des Tangens $\mathrm{tang}:]-\pi/2,\pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$. (Siehe Figur 52). Annahme: Es gibt eine SR-Kinematik x' mit $x \varrho_1 x'$. Sei $x=\langle R,Z,P;<,d,i\rangle$ und $x'=\langle E,W,P';\leqslant,\prec,i'\rangle$. Aus DIV-7) folgt $P=P'$, $W=R$, $E=\{\langle t,a\rangle/t \in Z \text{ und } a \in R\}$, $\leqslant=\{\langle\langle t,a\rangle,a\rangle/t \in Z, a \in R\}$ $\underline{zw}_{d,t}=\underline{zw}_{x'}$, $\equiv_{d,t}=\equiv_{x'}$, und ($\langle t,a\rangle\prec\langle t',b\rangle$ gdw $t<t'$ und $d_t(a,b)\leq t'-t$). Nach DIV-10) gilt: $i'_p(e)$ gdw $\exists t \in Z(e=\langle t,i(p,t)\rangle)$. Aus der Analysis wissen wir: es gibt $t_o<0$, sodaß $\mathrm{arctang}(t_o) < t_o$, also (1) $-\mathrm{arctang}(t_o) > |t_o|$.

Fig.52



Sei $e_o:=\langle 0,i(p,0)\rangle=\langle 0,a_o\rangle$ (= $\langle 0,\bar{a}\rangle$,da arctang(0)=0 und d_t eine Metrik ist) und $e_1:=\langle t_o,i(p,t_o)\rangle=\langle t_o,a_{t_o}\rangle$.Nach DIV-10) folgt $e_o,e_1\in i'_p$ und hieraus nach DIV-9-6): $e_o=e_1$ oder $e_o\rightsquigarrow e_1$ oder $e_1\rightsquigarrow e_o$,also nach Definition von $\rightsquigarrow$: $e_o=e_1$ oder $e_o\rightsquigarrow e_1$ oder $e_1\rightsquigarrow e_o$.Wegen $t_o<0$ ist $e_o\neq e_1$,also $e_o\rightsquigarrow e_1$ oder $e_1\rightsquigarrow e_o$.
1.Fall: $e_1\rightsquigarrow e_o$.Nach DIV-7-6) folgt: $t_o<0$ und $d_{t_o}(i(p,0),i(p,t_o))\leq 0-t_o=|t_o|$.Andererseits ist
$d_{t_o}(i(p,0),i(p,t_o))= d_{t_o}(a_o,a_{t_o})=d_{t_o}(a_{t_o},\bar{a})=-\text{arctang}(t_o)>|t_o|$
im Widerspruch zu (1).
2.Fall: $e_o\rightsquigarrow e_1$.Nach DIV-7-6) folgt $0<t_o$,im Widerspruch zur Wahl von $t_o<0$.

Die Ursache für das Scheitern der Reduktion liegt in DIV-9-6) und DIV-7-6).Nach DIV-7-6) muß für je zwei "klassisch interpretierte" Ereignisse $\langle t,a\rangle\prec\langle t',b\rangle$ gelten: $d_t(a,b)\leq t'-t$,d.h. der räumliche Abstand der Ereignisse darf,falls sie in der Kausalrelation zueinander stehen,den zeitlichen Abstand nicht übertreffen.Diese Bedingung braucht für zwei Ereignisse auf einer "klassischen" Bahn i_p nicht erfüllt zu sein.Wenn wir aber i_p mittels DIV-9) als "relativistische" Bahn interpretieren,so ergibt sich ein Widerspruch,denn für Ereignisse auf der relativistischen Bahn muß wegen DIV-9-6) und des daraus folgenden Bestehens einer Kausalrelation,etwa $\langle t,a\rangle \prec \langle t',b\rangle$, $d_t(a,b) \leq t'-t$ gelten.

Anders gesagt: die relativistischen Bahnen müssen immer im Lichtkegel jedes auf der Bahn liegenden Ereignisses verlaufen, während klassische Bahnen auch aus dem Lichtkegel heraus führen können.Wir haben bei der Reduktion die Steigung der Lichtgeraden (Geraden auf dem Rand eines Lichtkegels) durch die Forderung $d_t(a,b) \leq t'-t$ intuitiv gleich 1 gesetzt.Genauso gut hätten wir für ein $\alpha \in \mathbb{R}^+$: $d_t(a,b) \leq \alpha\,(t'-t)$ setzen können. An den bisherigen Ergebnissen hätte sich dadurch -bis auf entsprechende Modifikationen in den Beweisen- nichts geändert.Man sieht bei Betrachtung von Figur 41),daß mit größerem α auch die Lichtkegel immer "breiter" werden.Eine bekannte Überlegung lautet nun wie folgt.Läßt man α gegen Unendlich gehen,so nähert sich das relativistische Modell immer mehr an das klassische an,sodaß beide nach einem Grenzübergang "übereinstimmen".Da die Steigung α der Lichtkegel die Größe der Lichtgeschwindigkeit c darstellt,sagt man auch,daß "für c gegen Unendlich" die relativistische Theorie in die klassische "übergeht".Diese Überlegungen sind intuitiv richtig,aber es ist nicht klar,was die Ausdrücke "übereinstimmen" bzw."übergehen" genau bedeuten.

Man kann diesen Ausdrücken wie folgt einen präzisen Sinn geben.Man führt auf der Klasse der SR-Kinematiken einen Umgebungsbegriff ein,sodaß gilt: x' liegt in einer Umgebung von x gdw die $\prec'$-Relation in x' in einer "Umgebung" der $\prec$-Relation in x liegt.Wenn $E_x = E_{x'}$ und $W_x = W_{x'}$,kann man einen Umgebungsbegriff für die $\prec$-Relation durch Bezugnahme auf Koordinaten (die sich nach unserer früheren Beschreibung einführen lassen) genau definieren.Intuitiv wird $\prec'$ in einer Umgebung von $\prec$ liegen,wenn die Steigung von Lichtgeraden,die durch $\prec'$ gegeben sind,in einer Umgebung der Steigung von durch $\prec$ gegebenen Lichtgeraden liegt.Und diesen letzten Umgebungsbegriff für Steigungen (=reelle Zahlen) übernimmt man aus der Analysis.

Unter geeigneten Voraussetzungen an die Klasse der SR-Kinematiken,die hier erfüllt sind ist es dann möglich,zu definieren,daß die Modelle einer Folge $x_1,x_2,x_3,\ldots$ mit wachsendem Index in immer kleineren Umgebungen voneinander liegen (d.h. daß eine solche Folge eine "Cauchy-Folge" ist).Man kann nun eine Klasse M^* von Strukturen definieren,sodaß $M_1:=M(SR\text{-}KIN) \subseteq M^*$ und jede Cauchy-Folge in M_1 in M^* gegen einen Grenzwert (eine Struktur aus M^*) konvergiert.Der Konvergenzbegriff wird dabei aus dem Umgebungsbegriff in M_1 "abgeleitet".Wenn man den Umgebungsbegriff für M_1 "richtig" definiert,dann sind unter den Cauchy-Folgen in M_1 auch solche,bei denen die Steigung der Lichtkegel immer kleiner (c immer größer) wird.

Es läßt sich nun eine Reduktionsrelation ϱ_2 definieren,die jedes klassische Modell in ein Modell von M^* übersetzt und man beweist,daß sich jedes Modell aus M^* als Grenzwert einer Folge in M_1 darstellen läßt.Bei Vorliegen dieses Sachverhalts spricht man von <u>approximativer Reduktion</u> (hier: der klassischen auf die speziell relativistische Kinematik).Approximative Reduktion liegt also vor,wenn sich jedes klassische Modell x in ein Modell $x^* \in M^*$ durch eine exakte Reduktionsrelation ϱ_2 übersetzen läßt,sodaß x^* Grenzwert einer Folge von Modellen in M_1 ist (wobei ein geeigneter Umgebungsbegriff in M_1 vorhanden sein muß).

Wir wollen diese intuitiven Überlegungen hier nicht genauer ausführen,da dieses Kapitel genug formale und komplizierte Beweise enthält.Der allgemeine Begriff der approximativen Reduktion ist in [Mayr,1981] expliziert und eine Anwendung auf den vorliegenden Fall sollte keine prinzipiellen Schwierigkeiten machen (obwohl sie in der Literatur bis jetzt noch nicht zu finden ist).

Wir können jedenfalls feststellen,daß sich die klassische Kinematik zwar nicht exakt,aber doch approximativ auf die relativistische reduzieren läßt,sodaß auch im Fall der Kinematik der Hinweis auf Inkommensurabilität keinen Einwand gegen wissenschaftlichen Fortschritt darstellt.

LORENTZ-INVARIANZ*

Wir wenden uns abschließend der mathematisch etwas komplizierten Frage der Lorentz-Invarianz der SRZ zu.Dazu müssen wir zuerst sagen,was es heißen soll,die SRZ sei Lorentz-invariant und dazu wiederum brauchen wir den Begriff der Lorentz-Transformation.Denn die Lorentz-Invarianz der Theorie bedeutet intuitiv,daß die Modelle der Theorie unter Lorentz-Transformationen invariant (unverändert) bleiben.

Eine Lorentz-Transformation ist eine in bestimmter Weise definierte Funktion $L: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.Aber die mathematische Definition ist kompliziert und mühsam zu erläutern,sodaß wir eine andere Einführung vorziehen.Dazu müssen wir noch genauer sagen,was wir mit $\mathbb{R}^4$ meinen.Genau genommen ist die mathematische Struktur,die wir $\mathbb{R}^4$ nennen,eine sehr komplexe,"echte" Struktur in dem Sinn wie alle in diesem Buch behandelten Modelle Strukturen sind.Sie hat die Form

$$\langle N, G(\mathbb{R}^4); +, \cdot, <, 0, 1, \underline{+}, \underline{\cdot} \rangle ,$$

wobei N eine Menge (intuitiv die Menge der reellen Zahlen),+ und $\cdot$ die bekannte Addition und Multiplikation und $<$ die übliche Kleinerrelation für reelle Zahlen sind.0 und 1 sind die Zahlen "Null" und "Eins".$G(\mathbb{R}^4)$ ist ebenfalls eine Menge (die der Vektoren $\langle\alpha_1,..,\alpha_4\rangle$ mit $\alpha_1,..,\alpha_4 \in N$), $\underline{+}$ ist die Vektoraddition und $\underline{\cdot}$ die skalare Multiplikation $\underline{\cdot}: N \times G(\mathbb{R}^4) \to G(\mathbb{R}^4)$, $\alpha \underline{\cdot} \langle\alpha_1,..,\alpha_4\rangle := \langle\alpha\cdot\alpha_1,..,\alpha\cdot\alpha_4\rangle$.Die Axiome,die zur Charakterisierung von $N,+,\cdot,<,0$ und 1 erforderlich sind,kann man z.B. in [Tarski,1966],S.223 ff. nachlesen,die Axiome für die restlichen Entitäten $G(\mathbb{R}^4)$,$\underline{+}$ und $\underline{\cdot}$ in jedem Lehrbuch der linearen Algebra (etwa [Greub,1967],S.5): es sind einfach die Axiome für einen Vektorraum über einem Körper (der Körper ist hier $\langle N,+,\cdot,<,0,1\rangle$).Wenn man noch fordert,daß $G(\mathbb{R}^4)=N^4$ ist, so hat man die gewünschte Struktur,nämlich den $\mathbb{R}^4$,präzise axiomatisiert.Wir schreiben $G(\mathbb{R}^4)$ um anzudeuten,daß es sich um die "Grundmenge der Vektoren" des $\mathbb{R}^4$ handelt.

Man kann beweisen,daß je zwei Modelle der hier angedeuteten Axiome isomorph sind,sodaß der bestimmte Artikel in "der $\mathbb{R}^4$"

oder "die Struktur $\mathbb{R}^4$" gerechtfertigt ist.

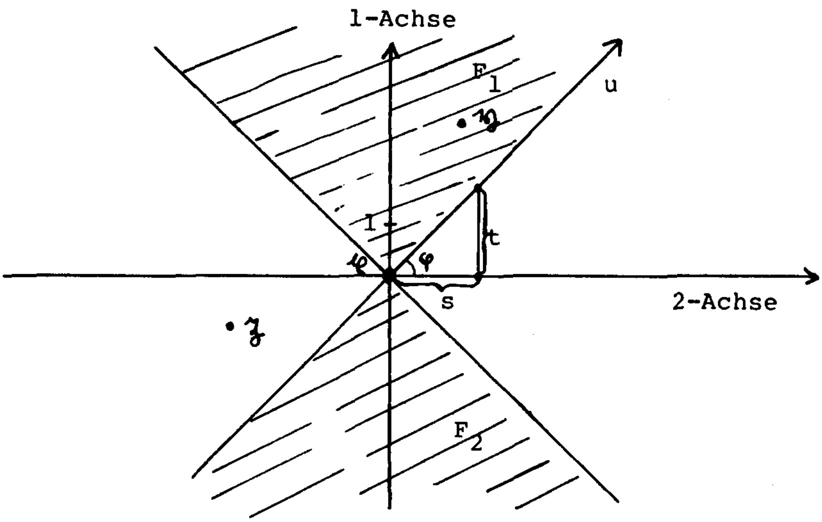
In der Struktur $\mathbb{R}^4$ läßt sich explizit eine 2-stellige mathematische "Kausalrelation" $\prec_c$ definieren.

<u>DIV-11</u> a) $G(\mathbb{R}^4)$ bezeichne die Menge aller Vektoren der Form $\langle\alpha_1,..,\alpha_4\rangle$ mit $\alpha_1,..,\alpha_4 \in \mathbb{R}$

b) Für $c \in \mathbb{R}^+$ wird $\prec_c \subseteq G(\mathbb{R}^4) \times G(\mathbb{R}^4)$ definiert durch $\langle\alpha_1,..,\alpha_4\rangle \prec_c \langle\beta_1,..,\beta_4\rangle$ gdw $\alpha_1 < \beta_1 \wedge$ $\|\langle\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\rangle - \langle\beta_2,\beta_3,\beta_4\rangle\| \leq c\cdot(\beta_1-\alpha_1)$

Diese Relation entspricht genau der $\prec$-Relation in Modellen der SRZ und läßt sich auch genauso darstellen,wenn wir die Menge $G(\mathbb{R}^4)$ zweidimensional zeichnen,wobei die beiden letzten Komponenten der Vektoren,also α_3 und α_4,einfach wegfallen (siehe Figur 53).

Fig.53



$\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ stellen Vektoren dar (Elemente von $G(\mathbb{R}^4)$).Es gilt $\mathfrak{T} \prec_c \mathfrak{Y}$,aber weder $\mathfrak{T} \prec_c \mathfrak{Z}$ noch $\mathfrak{Z} \prec_c \mathfrak{T}$.Die schraffierte Fläche F_1 enthält alle Punkte $\mathfrak{T}'$,für die $\mathfrak{T} \prec_c \mathfrak{T}'$ gilt,F_2 alle Punkte $\mathfrak{T}'$ mit $\mathfrak{T}' \prec_c \mathfrak{T}$.$F_1 \cup F_2$ entspricht dem Lichtkegel von $\mathfrak{T}$.Als Steigung des Lichtkegels,die etwa durch die Steigung von u angegeben ist,erhält man t/s.Mit der Lichtgeschwindigkeit c (=s/t) steht diese Steigung in der Beziehung 1/c=t/s,d.h.je größer c,desto flacher der Lichtkegel.

Offenbar ist $\langle G(\mathbb{R}^4); \prec_c\rangle$ eine "normale" Struktur. Zwar ist $\prec_c$ nur in der "ganzen" Struktur $\mathbb{R}^4$ explizit definierbar, weil in die Definition von $\prec_c$ $\pm, \cdot, <$ und weitere in $\mathbb{R}^4$ definierbare Funktionen, nämlich Betrag und $\| \;\|$, eingehen. Wir können aber versuchen, diese Definition zu "vergessen" und uns nur eine Menge $\prec_c \subseteq G(\mathbb{R}^4) \times G(\mathbb{R}^4)$ vorstellen, die nur, wenn man sie vom Standpunkt des ganzen $\mathbb{R}^4$ aus betrachtet, den definierenden Bedingungen von DIV-11b) genügt. Vergessen wir die restlichen Komponenten des $\mathbb{R}^4$, so bleibt $\langle G(\mathbb{R}^4); \prec_c\rangle$ übrig.

<u>DIV-12</u> a) L ist eine <u>c-Lorentz-Transformation</u> gdw

1) $c \in \mathbb{R}^+$
2) $L: G(\mathbb{R}^4) \rightarrow G(\mathbb{R}^4)$
3) L ist bijektiv
4) für alle $\mathcal{C}, \mathcal{Y} \in G(\mathbb{R}^4)$: $\mathcal{C} \prec_c \mathcal{Y}$ gdw $L(\mathcal{C}) \prec_c L(\mathcal{Y})$

b) L ist eine <u>Lorentz-Transformation</u> gdw es $c \in \mathbb{R}^+$ gibt, sodaß L eine c-Lorentz-Transformation ist

Damit haben wir eine ziemlich einfache, wenn auch nicht sehr explizite Charakterisierung der Lorentz-Transformationen. Da meist die Konstante c (die die Lichtgeschwindigkeit darstellt) als fest vorgegeben betrachtet wird, ist der Begriff der c-Lorentz-Transformation besser zu handhaben. Aus der Definition sieht man sofort, daß die c-Lorentz-Transformationen Isomorphismen für die Struktur $\langle G(\mathbb{R}^4); \prec_c\rangle$ sind. Ein Isomorphismus für die Struktur $\langle G(\mathbb{R}^4); \prec_c\rangle$ ist per Definition eine bijektive Funktion $f: G(\mathbb{R}^4) \rightarrow G(\mathbb{R}^4)$, die die $\prec_c$-Relation erhält, d.h. für die für alle $\mathcal{C}, \mathcal{Y} \in G(\mathbb{R}^4)$ gilt: $\mathcal{C} \prec_c \mathcal{Y}$ gdw $f(\mathcal{C}) \prec_c f(\mathcal{Y})$. Die c-Lorentz-Transformationen sind also nach DIV-12) genau die Isomorphismen für die Struktur $\langle G(\mathbb{R}^4); \prec_c\rangle$ oder mit anderen Worten: diese Struktur ist invariant unter c-Lorentz-Transformationen.

Man kann zeigen, daß sich jede c-Lorentz-Transformation (und damit auch jede Lorentz-Transformation) aufspalten läßt in zwei Teile: einen Teil, der Drehungen, Verschiebungen und zentrische Streckungen beinhaltet und einen Rest, den wir als Lorentz-Transformation im engeren Sinn bezeichnen wollen. Jede allgemeine Lorentz-Transformation läßt sich durch Hintereinanderschaltung dieser spezielleren Transformationen gewinnen, genau so, wie wir in Kap. III jede Galilei-Transformation aus Drehung, Verschiebung, Zeittranslation und Galilei-Transformation im engeren Sinn erhielten (vergleiche S.180). Die <u>c-Lorentz-Transformation</u> L_c <u>im engeren Sinn</u> hat folgende Form:

$$L_c(\langle \alpha_1,..,\alpha_4\rangle) =$$
$$\langle (\alpha_1 - v\alpha_2/c^2)(1-v^2/c^2)^{-1/2}, (\alpha_2 - v\alpha_1)(1-v^2/c^2)^{-1/2}, \alpha_3, \alpha_4\rangle ,$$

wobei v eine reelle Zahl ist. Für verschiedene v erhält man verschiedene L_c. Man sieht, daß L_c nur die ersten beiden Komponenten des Vektors $\langle \alpha_1,..,\alpha_4\rangle$ verändert. Wählen wir die übliche Bezeichnung mit t, x, y, z anstelle von $\alpha_1,..,\alpha_4$, so nimmt L_c folgende Form an:

$$L_c(\langle t,x,y,z\rangle) = \langle t',x',y',z'\rangle \quad \text{gdw}$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{1-\frac{v^2}{c^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{1-\frac{v^2}{c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

Meist wird in physikalischen Lehrbüchern die Lorentz-Transformation im engeren Sinn in letzterer Form dargestellt.

Wir müssen diese Art rein mathematischer Behandlung noch etwas weiter treiben, bevor wir zur physikalischen Interpretation kommen.

<u>DIV-13</u> a) G ist eine <u>für</u> $\langle G(\mathbb{R}^4); \prec_c\rangle$ <u>zulässige Geradenschar in</u> $\mathbb{R}^4$ gdw

1) G ist eine Menge von Geraden in $\mathbb{R}^4$
2) alle Geraden in G sind parallel
3) jedes $\mathfrak{x} \in G(\mathbb{R}^4)$ liegt auf einer Geraden von G
4) für alle $g \in G$ und alle $\mathfrak{x} \in g$ gibt es $\mathfrak{y} \in g$ mit $\mathfrak{x} \prec_c \mathfrak{y}$

b) Ist G eine für $\langle G(\mathbb{R}^4); \prec_c\rangle$ zulässige Geradenschar in $\mathbb{R}^4$, so definieren wir
$\lessdot_c \subseteq G(\mathbb{R}^4) \times G$ durch $\mathfrak{x} \lessdot_c g$ gdw $\mathfrak{x} \in g$

c) x ist ein <u>mathematisches Modell der</u> SRZ gdw es c und G gibt, sodaß

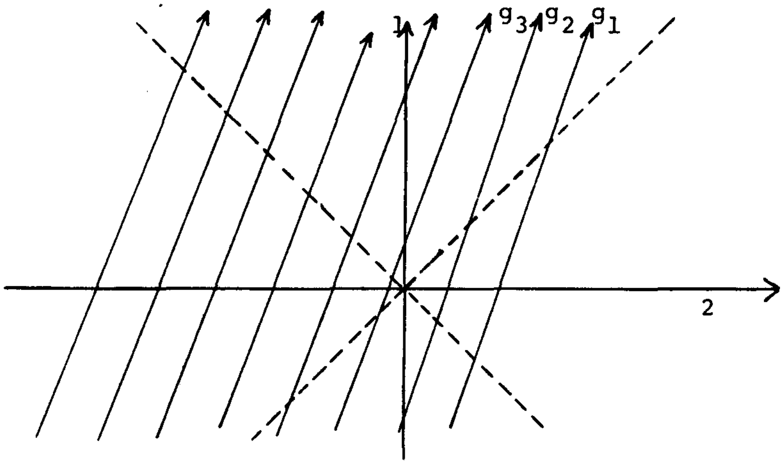
1) $x = \langle G(\mathbb{R}^4), G; \lessdot_c, \prec_c\rangle$
2) G ist eine für $\langle G(\mathbb{R}^4); \prec_c\rangle$ zulässige Geradenschar

in $\mathbb{R}^4$

3) $\prec_c$ ist wie in b) definiert

Eine für $<G(\mathbb{R}^4);\prec_c>$ zulässige Geradenschar läßt sich wie in Figur 54) veranschaulichen.

Fig.54



Bezüglich der zwei Achsen 1 und 2 ist der Lichtkegel (gestrichelte Linien) eingezeichnet,der andeuten soll,daß auf der Grundmenge eine Kausalrelation $\prec_c$ gegeben ist.In der Grundmenge haben wir die Geradenschar durch einige wenige hingezeichnete Geraden $g_1,g_2,\ldots$ angedeutet.Wir betrachten eine Gerade g als Menge von Punkten von $G(\mathbb{R}^4)$,genau wie wir dies in der Geometrie allgemein taten (vergleiche ÜIII-3).Dazu ist nur zu bemerken,daß sich in $\mathbb{R}^4$ eine Zwischenrelation explizit definieren läßt (ÜIV-24).Nach DIV-13a-3) soll jeder Punkt auf einer der Geraden liegen,d.h.die Geraden "erfüllen" die ganze Grundmenge,oder anders: sie bilden eine Klasseneinteilung auf der Grundmenge.Die in 13a-2) geforderte Parallelität ist in der Zeichnung leicht zu veranschaulichen,eine formale Definition,die mit dem euklidischen Abstand (ÜIV-24) arbeitet,erfordert allerdings einigen Aufwand,den wir uns hier schenken. Bedingung 4) von DIV-13a) schließlich drückt aus,daß die Geraden eine größere Steigung als die Lichtkegel haben.Die Gerade g_2 in Figur 54),die durch den Ursprung $\mathscr{C}_o$ des Koordinatensystems geht,verläuft ganz innerhalb des Lichtkegels von $\mathcal{C}_o$.Allgemeiner gilt: jede Gerade g verläuft völlig innerhalb aller Lichtkegel der auf g liegenden Punkte.Wegen der anderen Bedingungen kann man dies auf die schwächere Forderung DIV-13a-4) zurückspielen.

In DIV-13b) wird eine Inzidenzrelation zwischen Punkten in $G(\mathbb{R}^4)$ und den Geraden einer Geradenschar definiert. $\leqslant_c$ entspricht der Inzidenzrelation in der SRZ.Eine Geradenschar in der Struktur $\langle G(\mathbb{R}^4); \prec_c \rangle$ ergibt zusammen mit dieser Inzidenzrelation $\leqslant_c$ eine Struktur des "gleichen Typs",wie ihn Modelle der SRZ haben.Wir bezeichnen solche Strukturen deshalb als mathematische Modelle der SRZ (DIV-13c).

In der Tat sind es gerade diese mathematischen Modelle der SRZ,deren Struktur man durch die Axiome der SRZ erfassen wollte,oder besser: bei der Aufstellung der Axiome für die SRZ dienten die mathematischen Modelle,die schon bekannt waren,als "Wegweiser".Das äußert sich formal darin,daß jedes mathematische Modell der SRZ auch ein Modell der SRZ ist.Mit anderen Worten: es stellt sich heraus,daß die mathematisch definierten Modelle $\langle G(\mathbb{R}^4), G; \leqslant_c, \prec_c \rangle$ alle Axiome erfüllen,die in Modellen der SRZ gefordert werden (siehe TIV-9a) unten).

Dies allein wäre aber noch keine Garantie,daß die Axiome der SRZ die mathematischen Modelle schon vollständig charakterisieren.Es könnte ja sein,daß in den mathematischen Modellen weitere Sätze gelten,die aus den Axiomen der SRZ <u>nicht</u> ableitbar sind (aber im Vokabular der SRZ formulierbar).Erst wenn sichergestellt ist,daß so etwas nicht vorkommt,wird man sagen,daß die Axiomatisierung der SRZ adäquat ist.Tatsächlich können wir dies beweisen (TIV-9b).Wir können zeigen,daß jedes (nicht-mathematische) Modell der SRZ zu einem mathematischen Modell der SRZ isomorph ist.Würden die Axiome der SRZ nicht alle Eigenschaften der mathematischen Modelle erfassen,so könnte man diesen Satz nicht beweisen,denn es wäre möglich, Modelle der SRZ zu konstruieren,die die fraglichen Eigenschaften nicht besitzen und folglich auch nicht zu mathematischen Modellen isomorph sein können.Als einfache Folgerung aus diesem Satz erhält man TIV-9c).Zwei Modelle $\langle E, W; \leqslant, \prec \rangle$

und $\langle E',W';\lessdot',\prec'\rangle$ sollen dabei <u>isomorph</u> heißen, wenn es bijektive Funktionen $f:E\to E'$ und $g:W\to W'$ gibt, sodaß gilt: 1) für alle $e,e'\in E$: $e\prec e' \leftrightarrow f(e)\prec' f(e')$ und 2) für alle $e\in E$ und $w\in W$: $e\lessdot w \leftrightarrow f(e)\lessdot' g(w)$. Eine Theorie, in der je zwei Modelle isomorph sind, nennt man <u>kategorisch</u>. Sie charakterisiert ihre Modelle vollständig in folgendem Sinn. Für jeden Satz A, der sich im Vokabular der Theorie formulieren läßt, folgt A oder $\neg A$ aus den Axiomen der Theorie. Das heißt, die Axiome geben vollständig (für alle formulierbaren Sätze) darüber Auskunft, ob ein Satz der Sprache der Theorie aus ihnen folgt oder nicht. Diese Umschreibung der Vollständigkeit ist allerdings nur in Theorien erster Stufe richtig und daher mit Vorbehalten zu versehen, insbesondere bei der SRZ, die sich in unserer Formulierung wegen der vorkommenden Infima nicht in einer Sprache erster Stufe rekonstruieren läßt.

<u>TIV-9</u> a) Jedes mathematische Modell der SRZ ist ein Modell der SRZ

b) Jedes Modell der SRZ ist isomorph zu einem mathematischen Modell der SRZ

c) Je zwei Modelle der SRZ sind isomorph

Beweis: a) Man muß die Axiome von DIV-2) und DIV-6) nachprüfen. Lediglich DIV-6-4) und DIV-6-6) sind mühsam nachzurechnen, indem man Geradengleichungen für die involvierten Geraden aufstellt und die verschiedenen Infima zu gegebenem Anfangsereignis konkret berechnet.

b) Die Aussage des Satz lautet genauer:

Zu $x=\langle E,W;\lessdot,\prec\rangle\in M(SRZ)$ gibt es $\varphi:E\to\mathbb{R}^4$, $\Psi:W\to\mathbb{R}^3$ und $c\in\mathbb{R}^+$, sodaß gilt

1) φ und Ψ sind bijektiv

2) für alle $u\in W$ ist $\varphi_{/\hat{u}}:\hat{u}\to\{\langle t,\Psi(u)\rangle/t\in\mathbb{R}\}$ bijektiv

3) für alle $e\in E$ und $u\in W$: $e\lessdot u$ gdw $\varphi(e)\in\{\langle t,\Psi(u)\rangle/t\in\mathbb{R}\}$

4) für alle $e,e'\in E$: $e\prec e'$ gdw $\varphi(e)\prec_c\varphi(e')$

(Hieraus folgt insbesondere die Existenz einer bijektiven Abbildung von W auf eine Geradenschar G.) Sei x gegeben. Nach Definition ist $\langle W;\underline{zw}_x,\blacksquare_x\rangle\in M(GEO)$. Dann gibt es eine bis auf einen Faktor eindeutig bestimmte Funktion $d:W\times W\to\mathbb{R}$, sodaß für alle $u,v,w,u'\in W$:

$$d(u,v)+d(v,w)=d(u,w) \quad \text{gdw} \quad \underline{zw}_x(u,v,w) \quad \text{und}$$
$$d(u,v)=d(u',w) \quad \text{gdw} \quad uv \equiv_x u'w.$$

Wir wählen $u_o,u_1 \in W$ mit $u_o \neq u_1$ und setzen $d(u_o,u_1):=1$. Dann ist d eindeutig bestimmt.

Es gibt $u_2,u_3 \in W$, sodaß $K:=\langle u_o,u_1,..,u_3\rangle$ ein (räumliches) Koordinatensystem für $\langle x,d\rangle$ ist. Es sei $e_o \in \hat{u}_o$ und $e_1:=f_{u_o}(f_{u_1}(e_o))$. Nach TIV-7) gibt es genau ein $\Phi:\hat{u}_o \to \mathbb{R}$ mit den dort angegebenen Eigenschaften und $\Phi(e_o)=0$ und $\Phi(e_1)=2$.

<u>Lemma 1</u> Φ ist bijektiv

Wir definieren nun φ: φ hat die Form $\varphi=\langle\varphi_1,..,\varphi_4\rangle$. Sei $e \in E$. Es gibt genau ein $u \in W$ mit $e \in \hat{u}$. Seien $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ die Koordinaten von u in K. Wir setzen:

$$\varphi_i(e):=\alpha_i \quad \text{für } i=2,3,4 \quad \text{und}$$
$$\varphi_1(e):=1/2(\Phi(g_{u_o}(e)+\Phi(f_{u_o}(e))).$$

Wir definieren $\Psi:W \to \mathbb{R}^3$. Sei $u \in W$ und seien $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ die Koordinaten von u in K. Dann setzen wir $\Psi(u):=\langle\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\rangle$.

<u>Lemma 2</u> Ψ ist bijektiv

<u>Lemma 3</u> $\varphi_{/\hat{u}}:\hat{u} \to \{\langle t,\Psi(u)\rangle / t \in \mathbb{R}\}$ ist bijektiv

<u>Lemma 4</u> Für alle e und u: $e \prec u$ gdw $\varphi(e) \in \{\langle t,\Psi(u)\rangle / t \in \mathbb{R}\}$

Es bleibt zu zeigen, daß

(*) $\qquad e \prec e'$ gdw $(e) \prec_c (e')$

für ein geeignetes c. Wir setzen c:=1 und definieren für $u \in W$: $\Phi_u:\hat{u} \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$\Phi_u(e):=\begin{cases} \Phi(e) & \text{,falls } u=u_o \\ 1/2(\Phi(g_{u_o}(e))+\Phi(f_{u_o}(e))) & \text{,falls } u\neq u_o \end{cases}$$

<u>Lemma 5</u> $\Phi_u:\hat{u} \to \mathbb{R}$ ist bijektiv

Wir formulieren nun eine Reihe von Hilfssätzen, deren genaue Beweise dem interessierten Leser überlassen werden. Zur Abkürzung lassen wir Klammern um die Argumente von Funktionen weg und schreiben z.B. $\Phi_u f_u e$ statt $\Phi_u(f_u(e))$

<u>Lemma 6</u> Für $u,v \in W, u\neq v$ und $e \in \hat{u}$ gilt:

$$\Phi_v f_v e=1/2(\Phi_u e+\Phi_u f_u f_v e) \qquad \text{(ÜIV-25-(2))}$$

<u>Lemma 7</u> Gilt $e \in \hat{u}, e' \in \hat{u}', e'=f_{u'}e, e\neq e', e_1 \in \hat{v}, e_1 \prec e_2 \in \hat{v}'$ und $d(u,u')=\alpha(\Phi_{u'}e'-\Phi_u e)$ für $\alpha \in \mathbb{R}^+$, so auch
$d(v,v')=\alpha(\Phi_{v'}e_2-\Phi_v e_1)$ (ÜIV-25-(11))

Lemma 8 Aus $e \prec e', e \in \hat{u}, e' \in \hat{u}'$ folgt $\Phi_u e < \Phi_{u'} e'$ (ÜIV-25-(12))

Lemma 9 Aus $e \in \hat{u}, e' \in \hat{u}'$ folgt
$d(u,u') = \| \langle \varphi_2 e, .., \varphi_4 e \rangle - \langle \varphi_2 e', .., \varphi_4 e' \rangle \|$ (ÜIV-25-(13))

Lemma 10 Aus $e \in \hat{u}, e' \in \hat{u}', e' = f_{u'} e, e \neq e', e_1 \in \hat{v}, e_2 \in \hat{v}', \neg e_1 \prec e_2,$
$\neg e_2 \prec e_1, e_1 \neq e_2$ und $d(u,u') = \alpha(\Phi_{u'} e' - \Phi_u e)$ für $\alpha \in \mathbb{R}^+$ folgt
$d(v,v') > \alpha |\Phi_v e_1 - \Phi_{v'} e_2|$ (ÜIV-25-(14))

Lemma 11 Für $e \in \hat{u}$ gilt $\Phi_u e = \varphi_1 e$ (ÜIV-25-(15))

Wir beweisen nun (*):

1.) Es gelte $e \prec e'$. Dann ist $e \neq e'$ und mit $e \in \hat{u}, e' \in \hat{u}'$ folgt nach Lemma 8) $\Phi_u e < \Phi_{u'} e'$. Nach Lemma 11) ist zu zeigen, daß $\| \langle \varphi_2 e, .., \varphi_4 e \rangle - \langle \varphi_2 e', .., \varphi_4 e' \rangle \| \leq \Phi_{u'} e' - \Phi_u e$. Gemäß Konstruktion gilt $d(u_o, u_1) = 1$. Sei $e^* := f_{u_1} e_o \in \hat{u}_1$. Mit Lemma 6) erhält man $\Phi_{u_1} e^* = 1/2 (\Phi_{u_o} g_{u_o} e^* + \Phi_{u_o} f_{u_o} e^*) = 1/2 (\Phi_{u_o} e_o + \Phi_{u_o} e_1) = 1/2(0+2) = 1$. Es gilt also $d(u_o, u_1) = \alpha(\Phi_{u_1} e^* - \Phi_{u_o} e_o)$ mit $\alpha = 1$. Nach Lemma 7) folgt $d(u,u') \leq \alpha(\Phi_{u'} e' - \Phi_u e) = \Phi_{u'} e' - \Phi_u e$ und hieraus erhält man mit Lemma 9)
$\| \langle \varphi_2 e, .., \varphi_4 e \rangle - \langle \varphi_2 e', .., \varphi_4 e' \rangle \| \leq \Phi_{u'} e' - \Phi_u e$.

2) Es gelte $\varphi(e) \prec_c \varphi(e')$, d.h. $\varphi_1(e) < \varphi_1(e')$ und $\| \langle \varphi_2 e, .., \varphi_4 e \rangle - \langle \varphi_2 e', .., \varphi_4 e' \rangle \| \leq \varphi_1 e' - \varphi_1 e$. Aus $\varphi_1 e < \varphi_1 e'$ erhält man (1) $e \neq e'$. Es sei $e \in \hat{u}', e' \in \hat{u}'$, dann gilt nach Lemma 11) $\Phi_u e = \varphi_1 e < \varphi_1 e' = \Phi_{u'} e'$. Hieraus folgt nach Lemma 8): (2) $\neg e' \prec e$.
Annahme: $\neg e \prec e'$. Nach Teil 1.) gilt $d(u_o, u_1) = (\Phi_{u_1} f_{u_1} e_o - \Phi_{u_o} e_o)$.
Hieraus folgt nach Lemma 10) mit (2) $d(u,u') > 1 |\Phi_u e - \Phi_{u'} e'| = \Phi_{u'} e' - \Phi_u e$. Mit Lemma 9) erhält man
$\| \langle \varphi_2 e, .., \varphi_4 e \rangle - \langle \varphi_2 e', .., \varphi_4 e' \rangle \| > \Phi_{u'} e' - \Phi_u e = \varphi_1 e' - \varphi_1 e$ nach Lemma 11) im Widerspruch zur Voraussetzung.

c) folgt direkt aus b), indem man die beiden nach b) existierenden Isomorphismen hintereinanderschaltet. Q.E.D.

Nach diesen mathematischen Vorüberlegungen können wir uns der Frage der Lorentz-Invarianz der SRZ zuwenden. Wir geben drei -intuitiv äquivalente- verschiedene Explikationen für die Aussage an, die SRZ sei Lorentz-invariant.

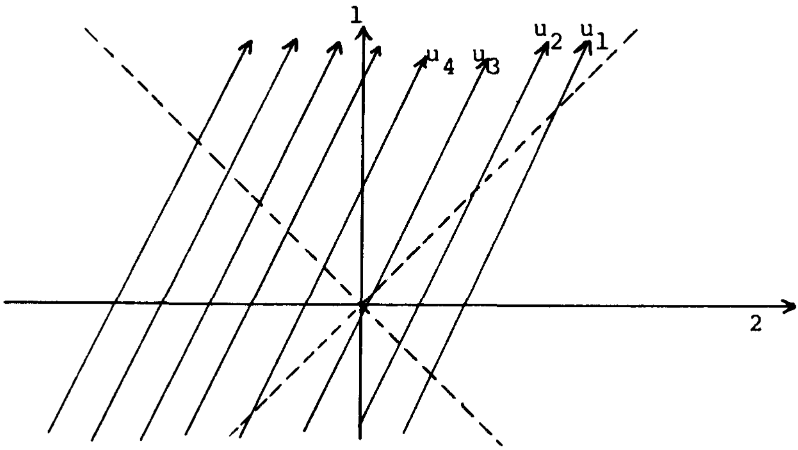
Die erste Explikation lautet wie folgt. Die SRZ ist Lorentz-invariant$_1$ gdw jedes Modell der SRZ isomorph zur Struktur $\langle G(\mathbb{R}^4); \prec_c\rangle$ ("der Lorentz-invarianten mathematischen Kausalstruktur") ist.Diese Explikation wird gerechtfertigt durch den Hinweis,daß ja $\langle G(\mathbb{R}^4); \prec_c\rangle$ die Lorentz-invariante Struktur sei und daß folglich jede dazu isomorphe Struktur im übertragenen Sinn auch Lorentz-invariant genannt werden könne.

Die Lage bei der SRZ im Hinblick auf diese Definition der Lorentz-Invarianz ist nun,daß Modelle der SRZ nicht die geeigneten Entitäten sind,die mit Strukturen $\langle G(\mathbb{R}^4); \prec_c\rangle$ isomorph sein können,einfach deshalb,weil in ihnen noch die zwei Komponenten W und $\lessdot$ vorkommen,die keine Gegenstücke in $\langle G(\mathbb{R}^4); \prec_c\rangle$ haben.Andererseits ist zu sagen,daß die Bijektion φ aus dem Beweis von TIV-9b) einen Isomorphismus der in jedem Modell der SRZ enthaltenen Teilstruktur $\langle E;\prec\rangle$ mit $\langle G(\mathbb{R}^4); \prec_c\rangle$ darstellt.Denn im Beweis von TIV-9b) wird gezeigt,daß für ein bestimmtes zu $\prec$ gehöriges c und alle $e,e' \in E$ gilt: $e \prec e'$ gdw $\varphi(e) \prec_c \varphi(e')$.Man kann also in Bezug auf die erste Definition der Lorentz-Invarianz sagen,daß die SRZ "fast" Lorentz-invariant ist,nämlich dann,wenn man die Bestandteile W und $\lessdot$ der Modelle einfach "vergißt".Allerdings kann man das "fast" nicht weglassen,denn W und $\lessdot$ sind zur Formulierung der Axiome in unserem System unerläßlich.

Eine zweite Explikation der Lorentz-Invarianz lautet wie folgt.Die SRZ ist Lorentz-invariant$_2$ gdw je zwei zulässige Koordinatisierungen der Ereignisse zu Koordinaten der Ereignisse führen,die durch eine Lorentz-Transformation auseinander hervorgehen.

Um den Begriff der zulässigen Koordinatisierung zu erläutern,gehen wir davon aus,daß im Beweis von TIV-9b) die bijektiven Funktionen φ und Ψ dadurch konstruiert werden,daß man im Modell $x \in M(SRZ)$ ein Koordinatensystem $K=\langle u_o,..,u_3,e_o,e_1\rangle$ -wie im vorletzten Abschnitt skizziert- auszeichnet und dann φ und Ψ definiert durch die Koordinaten,die die Ereignisse bezüglich K haben.Man stellt fest,daß für $u \in W$ das Bild $\varphi(\hat{u})$,also $\{\varphi(e)/e \in \hat{u}\}$ eine Gerade in $G(\mathbb{R}^4)$ ist und darüberhinaus,daß all diese Bilder,also $\{\varphi(\hat{u})/u \in W\}$ eine für $\langle G(\mathbb{R}^4);\prec_c\rangle$ zulässige Geradenschar in $\mathbb{R}^4$ bilden,wenn man c=1 setzt.Anders gesagt bilden die Bahnen $\hat{u}$ der Dinge in W, wenn man sie in die mathematische Struktur $<G(\mathbb{R}^4);\prec_1>$ abbildet,dort eine Geradenschar im Sinn von DIV-13a).Die Geradenschar,die im Beweis von TIV-9b) so entsteht,verläuft genau vertikal durch die Lichtkegel.Diese Situation stellt aber einen Spezialfall dar,was man an TIV-9a) sieht.Auch eine Geradenschar,die relativ zu den Lichtkegeln geneigt ist,liefert ein Modell der SRZ,solange nur die Geraden "innerhalb" der Lichtkegel verlaufen.Wir können uns also die Modelle der SRZ in Abweichung und Verallgemeinerung der bisherigen Figuren,auch so vorstellen,daß die Bahnen von W nicht genau vertikal durch die Lichtkegel laufen (siehe Figur 55).

Fig.55

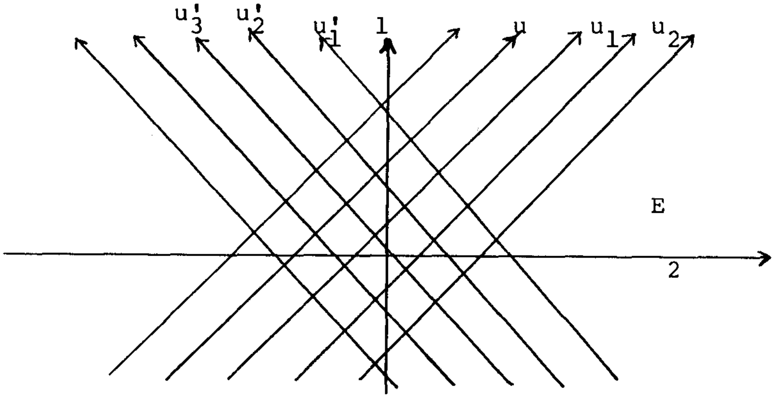


Die Geradenschar im mathematischen Modell ist durch jede einzelne Gerade aus der Schar eindeutig bestimmt und wenn wir diesen Sachverhalt in das nicht-mathematische Modell übertragen,sehen wir,daß "eigentlich" nicht die ganze Menge W gebraucht wird,sondern nur ein geeignetes "Gerüst" für diese Menge,d.h.ein Koordinatensystem für x.Auch hier gilt das Gesagte nicht streng,denn für die Formulierung der Axiome braucht man wirklich alle Elemente von W.Nur vom fertigen Modell aus betrachtet erweist sich der größte Teil von W im Nachhinein als überflüssig.

Jedenfalls hilft es der Vorstellung,sich anstelle von W in einem Modell nur vier Bahnen $\hat{u}_o,..,\hat{u}_3$ gegeben zu denken, die ein räumliches Koordinatensystem für die ganze Menge W bilden. Bei dieser Vorstellung liegt es nahe, W -oder besser ein in W liegendes räumliches Koordinatensystem- als eine zulässige Koordinatisierung der Ereignismenge E anzusehen. Denn W enthält nach Auszeichnung zweier Ereignisse e_o, e_1 auf einer Bahn ein solches Koordinatensystem (und sogar sehr viele), mit dessen Hilfe man jedem Ereignis e vier Raum-Zeit-Koordinaten zuordnen kann. Wir wollen den Vektor aus den vier Koordinaten, die das Ereignis e bezüglich des Koordinatensystems $K=\langle u_o,..,u_3,e_o,e_1\rangle$ erhält, mit K(e) bezeichnen: $K(e)=\langle\alpha_1,..,\alpha_4\rangle$.

Damit haben wir auch die obige zweite Explikation schon präzisiert. Eine <u>zulässige Koordinatisierung</u> ist einfach eine Menge W von Bahnen in einem Modell zusammen mit einem mittels W fixierten raum-zeitlichen Koordinatensystems K. Die Koordinaten bezüglich einer solchen Koordinatisierung sind für jedes Ereignis e die Komponenten des Vektors K(e), der bezüglich K gebildet wird. Die Lorentz-Invarianz$_2$ lautet nun wie folgt. Die SRZ ist <u>Lorentz-invariant</u>$_2$ gdw für alle $x,x' \in M(SRZ)$ und alle K,K' gilt: ist $E_x=E_{x'}$ und sind K und K' Koordinatensysteme für x und x', so gibt es eine Lorentz-Transformation L, sodaß für alle $e \in E$ gilt: $K(e)=L(K'(e))$. Der Witz ist hier, daß in den beiden Modellen, die die gleiche Ereignismenge haben, die Mengen der Bahnen W,W' verschieden sein können. Zeichnerisch stellt man dies durch zwei sich überlagernde oder durchdringende Geradenscharen dar (Figur 56).

Fig.56



Die Ereignismenge E ist gegeben und wird durch zwei gegeneinander geneigte Geradenscharen "ausgeschöpft".Hier kommt nun erstmals eine physikalische Vorstellung ins Spiel.Bei physikalischer Interpretation von W und W' als Mengen von Dingen kann man zwei Bahnen $\hat{u}$ und $\hat{u}'$ in Figur 56) deuten als Bahnen zweier realer Dinge,die sich gleichförmig gegeneinander bewegen.Dies wird besonders klar,wenn die Bahnen der einen Menge W genau vertikal verlaufen.Die Bahn eines Dinges aus der anderen Menge W' ist dann -vom Standpunkt der SR-Kinematik aus betrachtet- die Bahn eines Partikels,das sich relativ zu W und zu einem in W gegebenen Koordinatensystem mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

Fragen wir nun,wie es bei der SRZ bezüglich der Lorentz-Invarianz$_2$ steht.Die Antwort ist klar negativ und deutet darauf hin,daß bei unserer Definiton von "Lorentz-Invarianz$_2$" etwas übersehen wurde.Intuitiv lautet die obige Definition wie folgt:" je zwei Koordinatisierungen einer Ereignismenge gehen durch eine Lorentz-Transformation auseinander hervor".Dies kann auch intuitiv nicht stimmen.Denn eine Ereignismenge (d.h. hier genauer: eine <u>bloße</u> Ereignismenge ohne weitere Struktur) läßt sich völlig beliebig koordinatisieren.Wir haben vergessen,daß die Koordinatisierung mit einer auf der Ereignismenge zusätzlich vorhandenen Struktur -nämlich der durch $\prec$ gegebenen Kausalstruktur- verträglich sein muß.Wir sind in der SRZ nicht an beliebigen Koordinatisierungen interessiert,sondern nur an solchen,bei denen die Vektoren K(e) der Koordinaten der $\prec_c$-Relation genauso genügen,wie die ursprünglichen Ereignisse e der $\prec$-Relation.Mit anderen Worten: wir haben bei der zweiten Explikation vergessen,daß die SRZ sich im wesentlichen für die Kausalstruktur interessiert und daß Koordinatisierungen eine reine Hilfsfunktion haben: man braucht sie für konkrete Rechnungen.Wir müssen also die obige Definition der Lorentz-Invarianz$_2$ so ändern,daß die betrachteten Koordinatisierungen alle Koordinatisierungen der <u>gleichen</u> Kausalstruktur sind.Erst dann drückt die Lorentz-Invarianz$_2$ wirklich eine Invarianz aus,nämlich die Invarianz der Kausalstruktur $\langle E;\prec\rangle$ unter verschiedenen Koordinatisierungen.Wir erhalten folgende verbesserte Definition.

<u>DIV-14</u> Die SRZ ist <u>Lorentz-invariant</u>$_2$ gdw für alle $x,x' \in M(SRZ)$ und alle K,K' gilt:
wenn K und K' Koordinatensysteme für x und x' sind und $E_x = E_{x'}$ und $\prec_x = \prec_{x'}$, dann gibt es eine Lorentz-Transformation L, sodaß für alle $e \in E_x$: $K(e)=L(K'(e))$

<u>TIV-10</u> Die SRZ ist Lorentz-invariant$_2$

Beweis: Wenn wir im Beweis von TIV-9b) in x mit einem vorgegebenen Koordinatensystem beginnen, erhalten wir bei analoger Konstruktion von φ und ψ das gleiche Resultat, nämlich eine Bijektion $\varphi: E_x \to \mathbb{R}^4$ mit $e \prec e' \Leftrightarrow \varphi(e) \prec_1 \varphi(e')$. Die gleiche Konstruktion für x' führt zu einem bijektiven $\varphi': E_{x'} \to \mathbb{R}^4$ mit $e \prec e' \Leftrightarrow \varphi'(e) \prec_1 \varphi'(e')$. Dann ist $\varphi^{-1} \circ \varphi'$ ein Isomorphismus für die Struktur $\langle G(\mathbb{R}^4); \prec_1 \rangle$ und folglich nach DIV-12) eine Lorentz-Transformation. (φ^{-1} bezeichnet hier die zu φ inverse Abbildung.) Nach Konstruktion ist für $L := \varphi^{-1} \circ \varphi'$ die Gleichung $K(e)=L(K'(e))$ für alle e erfüllt.

Kommen wir schließlich zur dritten Version, die zugleich die in physikalischen Lehrbüchern am häufigsten zu findende ist. Danach ist die SRZ <u>Lorentz-invariant</u>$_3$ gdw in je zwei gleichförmig gegeneinander bewegten Inertialsystemen die bezüglich beider Systeme gewonnenen Koordinaten der Ereignisse durch eine Lorentz-Transformation auseinander hervorgehen.

Auch hier ist einige Präzisierung nötig. Als "Interialsystem" können wir wieder die Menge der Bahnen W in den Modellen deuten, denn diese Bahnen sind Geraden und daher physikalisch gesprochen "Trägheitsbahnen", d.h. Bahnen von Teilchen, die sich ohne Einwirkung äußerer Kräfte bewegen. Daß sich zwei Inertialsysteme gleichförmig gegeneinander bewegen, können wir auch wie vorher dadurch ausdrücken, daß bei gegebenem E und $\prec$ zwei verschiedene Bahnmengen W und W' betrachtet werden, die beide "innerhalb" der durch $\prec$ gegebenen Lichtkegel verlaufen. Bezüglich zweier Modelle $\langle E,W; \lessdot, \prec \rangle$ und $\langle E,W'; \lessdot', \prec' \rangle$ betrachten wir Koordinatensysteme K und K' und die dadurch festgelegten "Koordinatenvektoren" $K(e)$ und $K'(e)$ der Ereignisse e.

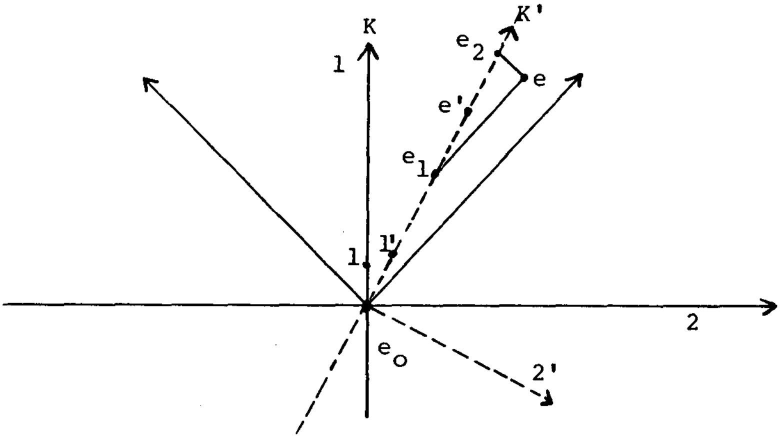
Der Einfachheit halber betrachten wir den Spezialfall (der aber alles wesentliche des allgemeinen Falles enthält), in dem beide Koordinatensysteme in "Normalstellung" zueinander stehen. Zwei Koordinatensysteme $K=<u_o,..,u_3,e_o,e_1>$ und $K'=<u'_o,..,u'_3,e'_o,e'_1>$ stehen <u>zueinander in Normalstellung</u>, wenn gilt $e_o=e'_o$ und die Bahn $\hat{u}'_o$ ist nur in Richtung der ersten räumlichen Koordinatenachse von K geneigt. Die präzisierte Definition lautet dann wie folgt. Die SRZ ist <u>Lorentz-invariant</u>$_3$ gdw für alle $x,x' \in M(SRZ)$ und alle K,K' gilt: wenn K und K' Koordinatensysteme für x und x' sind und zueinander in Normalstellung stehen, und wenn $E_x=E_{x'}$ und $\prec_x = \prec_{x'}$,dann gibt es eine Lorentz-Transformation im engeren Sinn L_c, sodaß für alle $e \in E_x$ gilt: $K(e)=L_c(K'(e))$.

<u>TIV-11</u> Die SRZ ist Lorentz-invariant$_3$

Beweis: Nach TIV-10) sind die Koordinaten eines Ereignisses e durch eine Lorentz-Transformation im Sinn von DIV-12) miteinander verbunden. Daß jede solche Lorentz-Transformation sich auch mathematisch explizit in der bekannten Weise definieren läßt, stellt ein mathematisch etwas tieferliegender Satz sicher, der für die Relativitätstheorie in [Zeeman, 1964] formuliert wurde. Nach diesem Satz stimmen die Lorentz-Transformationen im Sinne von DIV-12) überein mit den Lorentz-Transformationen, die man mathematisch explizit definiert und von denen die Lorentz-Transformationen im engeren Sinn eine Teilklasse bilden.

TIV-11) läßt sich auch direkt beweisen, indem man eine "physikalische Herleitung" der Lorentz-Transformation nachvollzieht. Im wesentlichen ist dabei eine Umrechnung der Koordinaten des Ereignisses in Figur 57) bezüglich der zwei Koordinatensysteme K und K' zu bewältigen, wobei der Ursprung von K' relativ zu K sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Die Zeitkoordinate bezüglich K' z.B. ermittelt man, indem man die Gleichzeitigkeitsdefinition DIV-8) nachvollzieht. Man erhält e' als zu e in K' gleichzeitig. Nun ist noch der Abstand von e' zu e_o zu ermitteln, wozu man die Zeiteinheiten in K und K' miteinander vergleichen muß. Dieser Vergleich ist ziemlich kompliziert und benötigt eine dreidimensionale bildliche Darstellung, weshalb wir ihn unterdrücken. Wenn man den numerischen Abstand zwischen e_o und e' durch die Einheit 1' teilt, erhält man die Zeitkoordinate von e in K'.

Fig.57



Schließlich bemerken wir noch,daß in unserem Rahmen die Lorentz-Invarianz keine Eigenschaft einzelner Modelle ist, sondern eine Aussage über mehrere Modelle darstellt.Es liegt daher nahe,eine Querverbindung einzuführen.

DIV-15 Q ist die Querverbindung für die SRZ gdw

$Q \subseteq Pot(M(SRZ))$ und für alle X: $X \in Q$ gdw

1) $X \neq \emptyset$

2) für alle $x,x' \in X$: wenn $E_x = E_{x'}$,dann $\prec_x = \prec_{x'}$

Diese Querverbindung drückt aus,daß die Kausalrelation eine "innere" Eigenschaft der Ereignismenge darstellt,die sich nicht ändert,wenn man die Ereignismenge von verschiedenen Koordinatensystemen aus (W_x bzw.$W_{x'}$) betrachtet.Nach leichter Umformulierung ist dann die Lorentz-Invarianz eine Eigenschaft von Mengen X,die die Querverbindung erfüllen.

ÜBUNGEN ZU KAPITEL IV

(ÜIV-1): (1) Stelle die Bewegung eines Zuges auf gerader Strecke zwischen zwei Haltepunkten in einem Raum-Zeit-Diagramm dar.(Trage die Zeit auf der horizontalen Achse,die Entfernung vom ersten Bahnhof auf der vertikalen Achse ab.)

(2) Drehe das Bild aus (1) um 90° und vergleiche mit der Bahn 6_1 in Figur 35).
(3) Stelle die Bewegung eines Teilchens p,das sich räumlich ständig auf einem Kreis herum gleichförmig bewegt,im Bild mit einer Zeitachse und zwei räumlichen Achsen dar.(Rein räumlich ist p's Bahn ein Kreis in einer räumlichen Ebene (vergleiche Figur 21).Laß die Ebene "nach oben gleiten",während p den Kreis durchläuft.)
(4) Wie sieht die Darstellung der Bewegung von (3) aus,wenn man den Raum eindimensional zeichnet?

(ÜIV-2): (1) Zeige: Die $\leq$-Relation auf $\mathbb{R}$ ist eine Halbordnung.
(2) Beweise: In (1) sind $\inf_{\leq} X$ und $\sup_{\leq} X$ für $X \subseteq \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt,falls X beschränkt ist.
(3) Gib ein Beispiel für eine Halbordnung $\leq$ auf einer Menge N,sodaß nicht für alle $X \subseteq N$ $\inf_{\leq} X$ und $\sup_{\leq} X$ existieren. (Wähle N geeignet.)

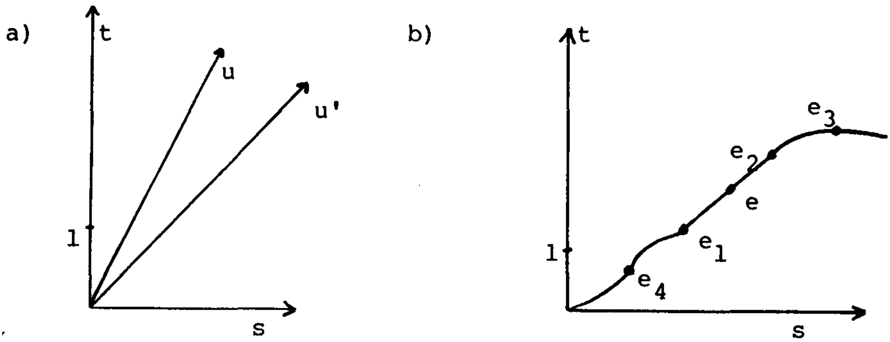
(ÜIV-3): Beweise: Ist $\langle E,W;\epsilon,\prec\rangle$ ein potentielles Modell der SRZ,so bilden die Mengen $\hat{u}:=\{e \in E/e \epsilon\, u\} \subseteq E$ mit $u \in W$ eine Klasseneinteilung auf E.(Vergleiche ÜI-29).

(ÜIV-4): Es sei $x=\langle E,W;\epsilon,\prec\rangle$ wie folgt definiert.$E:= \mathbb{R}^2$, $g \in W$ gdw es $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt,sodaß $g= \{\langle\alpha,\beta\rangle/\beta \in \mathbb{R}\}$ (d.h.W enthält genau alle vertikalen Geraden), $\langle\alpha,\beta\rangle \epsilon g$ gdw $g=\{\langle\alpha,\gamma\rangle/\gamma \in \mathbb{R}\}$ und $\langle\alpha,\beta\rangle \prec \langle\alpha',\beta'\rangle$ gdw ($\beta < \beta'$ und $|\alpha'-(\alpha+1)| \leq \beta'-\beta$).
(1) Zeige: Bedingungen 4),5),6),7) und 9) von DIV-2) sind in x erfüllt.
(2) Zeige: Für $g=\{\langle 0,\alpha\rangle/\alpha \in \mathbb{R}\}$ und $X:=\{\langle 0,\beta\rangle/\beta \in [0,1]\} \subseteq g$ gilt: (nicht: $\inf_{\prec} X \epsilon g$) und (nicht: $\sup_{\prec} X \epsilon g$). (Berechne $\inf_{\prec} X$ und $\sup_{\prec} X$ mittels der Definition von $\prec$.)
(3) Definiere: "$e \epsilon \hat{u}$ ist für $\hat{u}$ ein erstes (bzw.letztes) Ereignis bezüglich $\prec$".

(ÜIV-5): (1) In Figur 58) (nächste Seite) sind zwei Bahnen $\hat{u},\hat{u}'$ dargestellt,die von Teilchen p,p' in der Zeit (t-Achse) durchlaufen werden.Welches der Teilchen hat die größere

Durchschnittsgeschwindigkeit? (Durchschnittsgeschwindigkeit ist $\Delta s/\Delta t$.)

Fig.58



(2) Definiere für die Bahn eines Teilchens p in Figur 58b) und das Ereignis e: "p hat zu e die mittlere Geschwindigkeit v". (Betrachte eine hinreichend kleine "Umgebung" von e und Ereignisse $e_1, e_2 \in \hat{u}$ in dieser Umgebung.)
(3) Definiere für Figur 58b) und i=3,4: "p hat bei e_i die Geschwindigkeit v". (Grenzwertbildung unter Benutzung von (2).)
(4) Was bedeutet die Krümmung der Bahn in Figur 58b) für die Geschwindigkeitsänderung von p?

(ÜIV-6): (1) Definiere für die Bahn $\hat{u}$ in Figur 58b): "$\hat{u}$ hat bei e die Steigung α".
(2) Wie (1) für e_4 anstelle von e. (Grenzwertbildung.)

(ÜIV-7): Zeige in Figur 39): Jede von e ausgehende Bahn, deren Steigung stets ≤ 1 ist, liegt in der Ereignismenge F und zu jedem Ereignis e' in F gibt es eine Bahn, die von e ausgeht, stets Steigung ≤ 1 hat und durch e' geht. (Benutze ÜIV-6).)

(ÜIV-8): Es sei $R := \mathbb{R}^2$ und $\underline{zw}$ und $\equiv$ auf R definiert durch die euklidische Metrik (vergleiche Kap.III, DIII-4). $x := \langle R; \underline{zw}, \equiv\rangle$ ist ein Modell der euklidischen Geometrie. G sei die Menge aller Geraden in R.
(1) Definiere: "Zwei Geraden g und g' in x sind parallel"

(Vergleiche ÜIII-3).)

(2) Seien g und $g^o \in G$ Geraden, die senkrecht aufeinander stehen und W die Menge aller zu g parallelen Geraden in x. Wir definieren für $g' \in W$: $\langle\alpha,\beta\rangle \lessdot g'$ gdw $\langle\alpha,\beta\rangle \in g'$. Zeige: $\langle R,W;\lessdot\rangle$ erfüllt DIV-2-1), 2-2), 2-5), 2-6) und 2-7).

(3) Es sei $e_o \in \mathbb{R}^2, e_o \notin g^o$ und $e_o \in g$ $(g,g^o$ wie in (2)). Für $e,e' \in g$ definieren wir: $e < e'$ gdw ($\underline{zw}(e,e',e_o)$ oder $\underline{zw}(e,e_o,e')$) und $e \neq e'$. Für $e,e' \in R$ definieren wir: $e <' e'$ gdw es g_1,g_2,e_1,e_2 gibt, sodaß $g_1 \parallel g^o$ und $g_2 \parallel g^o$ und $e \lessdot g_1$ und $e' \lessdot g_2$ und $\{e_1\}=g_1 \cap g$ und $\{e_2\}=g_2 \cap g$ und $e_1 < e_2$. Zeige: $<'$ ist eine Ordnung auf R (vergleiche ÜI-10).

(4) Es seien $g_1,g_2 \in G, g_1,g_2 \in W$ und nicht parallel. Wir definieren unter Benutzung von (2) und (3): $\langle\alpha,\beta\rangle \prec \langle\alpha',\beta'\rangle$ gdw es g_1',g_2',g_3,e_3,e_4 gibt, sodaß: $g_1' \parallel g_1$ und $g_2' \parallel g_2$ und $\langle\alpha,\beta\rangle \in g_1' \cap g_2'$ und $\langle\alpha,\beta\rangle <' \langle\alpha',\beta'\rangle$ und $e_3 \in g_1' \cap g_3$ und $e_4 \in g_2' \cap g_3$ und $\langle\alpha',\beta'\rangle \in g_3$ und $\underline{zw}(e_3,\langle\alpha',\beta'\rangle,e_4)$. Zeige: $\langle R,W;\lessdot,\prec\rangle$ ist ein potentielles Modell der SRZ.

(ÜIV-9): Beweise TIV-1.

(ÜIV-10): Beweise TIV-3. (Benutze ÜIV-2) für Teil a).)

(ÜIV-11): Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(\alpha):=\sin(\alpha)$ und $f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f'(\alpha):=\alpha+1$. Berechne $(f \circ f')(\pi/2)$. Gib eine Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, sodaß $(f' \circ g)(\alpha)=\alpha$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

(ÜIV-12): Eine Funktion $f:D \to D'$ heißt <u>bijektiv</u>, wenn f <u>injektiv</u> und <u>surjektiv</u> ist, d.h.

wenn $x,y \in D$ und $x \neq y$, dann $f(x) \neq f(y)$ (injektiv)

zu jedem $x' \in D'$ gibt es $x \in D$ mit $f(x)=x'$ (surjektiv).

Zeige: $f:D \to D'$ ist bijektiv gdw es eine Funktion $g:D' \to D$ gibt, sodaß für alle $x \in D$: $g(f(x))=x$ und für alle $x' \in D'$: $f(g(x'))=x'$. g heißt die zu f <u>inverse</u> Funktion.

(ÜIV-13): Es sei $E:=\mathbb{R}^2$ und $g:=\{\langle\alpha,0\rangle / \alpha \in \mathbb{R}\}$. Wir definieren eine "Projektion" $pr: \mathbb{R}^2 \to g$ durch $pr(\langle\alpha,\beta\rangle):=\langle\alpha,0\rangle$.

(1) Definiere: "g' ist eine zu g senkrechte Gerade". (Definiere g' als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.)

(2) Zeige: Ist g' eine zu g senkrechte Gerade, so gilt für alle $<\alpha,\beta>,<\alpha',\beta'> \in g'$: $pr(<\alpha,\beta>)=pr(<\alpha',\beta'>)$.

(ÜIV-14): Gib eine "nicht-projizierte" zeichnerische Darstellung von Axiom 4).

(ÜIV-15): Sei $E:=\mathbb{R}^2$ und $W:=\{\{<\alpha\ \beta>/\beta \in \mathbb{R}\}/\alpha \in \mathbb{R}\}$. Für $u=\{<\alpha_1,\beta>/\beta \in \mathbb{R}\}$, $u'=\{<\alpha_2,\beta>/\beta \in \mathbb{R}\} \in W$ und $e=<\alpha_1,\beta>, e'=<\alpha_1,\beta'> \in u$ definieren wir den Abstand $d(e,e'):=|\beta-\beta'|$ und den Abstand $d^*(u,u'):=|\alpha_1-\alpha_2|$. $\prec \subseteq E\times E$ sei definiert durch $<\alpha,\beta> \prec <\alpha',\beta'>$ gdw $(\beta<\beta'$ und $|\alpha-\alpha'| \leq \beta'-\beta)$.
(1) Zeige: Für $<\alpha,\beta> \notin u, <\alpha,\beta> \in u'$ gilt $f_u(<\alpha,\beta>)= <\alpha_1,\beta+d^*(u,u')>$.
(2) Zeige: Für $<\alpha,\beta> \notin u, <\alpha,\beta> \in u'$ gilt
$d(<\alpha,\beta>,f_{u'}(f_u(<\alpha,\beta>)))=2d^*(u,u')$.
(3) Zeige: Zu $e,e' \in u$ mit $e\neq e'$ gibt es $v \in W$, sodaß $v\neq u$ und $d(e,f_u(f_v(e))) < d(e,e')$.

(ÜIV-16): Beweise TIV-4a).(Man beweist zunächst einige Hilfssätze:
Lemma 1: Wenn $e,e' \in \hat{u}$ und $v\neq u$, dann $e\prec e'$ gdw $f_v(e)\prec f_v(e')$
Lemma 2: Wenn $u,v \in W$ und $e \in E$, dann $f_u(e) \preccurlyeq f_u(f_v(e))$
Lemma 3: Wenn $e \in \hat{u}'$, $e' \in \hat{v}$ und $e\prec e' \prec f_u(e)$, dann
$f_u(f_v(e))=f_u(e)$ und $f_v(e)=e'$
Lemma 4: Wenn $\underline{zw}(u',v,u)$, $\underline{zw}(u',v_1,u)$ und $\underline{zw}(u',v_2,u)$, dann
$\underline{zw}(v,v_1,v_2)$ oder $\underline{zw}(v_1,v,v_2)$ oder $\underline{zw}(v,v_2,v_1)$
Lemma 1) und Lemma 2) braucht man für Lemma 3). Beweise T4a) indirekt. Nach Lemma 3) und DIV-6-8) erhält man die Voraussetzung von Lemma 4). In jedem der drei Fälle, die sich aus Lemma 4) ergeben, zeigt man, daß es ein Signal zwischen v_1 und v_2 gibt.)

(ÜIV-17): Zeige für $x \in M(SRZ)$ und $e,e' \in \hat{u}$: wenn $e \rightsquigarrow e'$, dann $e\prec e'$.

(ÜIV-18): Es sei T eine Theorie, deren Modelle durch Axiome $A_1,..,A_n$ charakterisiert werden und $i\leq n$. A_i heißt <u>von</u> $A_1,...,A_{i-1},A_{i+1},..,A_n$ <u>(un)abhängig</u> gdw A_i aus $A_1,..,A_{i-1},A_{i+1},..,A_n$

(nicht) logisch folgt. $A_1,..,A_n$ heißen unabhängig, wenn für kein $i \leq n$: A_i von $A_1,..,A_{i-1},A_{i+1},..,A_n$ abhängig ist.
Zeige: Die Axiome für Modelle der SRZ sind nicht unabhängig. (DIV-6-7) ist aus den restlichen Axiomen beweisbar. Man überträgt die nachzuweisenden Eigenschaften aus den räumlichen Teilen mittels der f_u-Funktionen auf die Bahnen.)

(ÜIV-19): Beweise, daß DIV-2-4) und DIV-2-7) für x' gelten.

(ÜIV-20): Beweise, daß x' DIV-6-4) erfüllt.

(ÜIV-21): Modifiziere DIV-8-4) so, daß $|\Phi(e)-\Phi(e_1)|$ sich zu $|\Phi(e_2)-\Phi(e)|$ verhält wie 3 zu 1. (Benutze die in DIV-8-4) eingeklammerte Formel.)

(ÜIV-22): $\Phi:\hat{u}\to \mathbb{R}$ heiße stetig bezüglich $\prec$ gdw für alle $X \subseteq \hat{u}$ gilt: ist X bezüglich $\prec$ beschränkt, so ist $\Phi(\inf_{\prec} X) = \inf_{<}\{\Phi(x)/x \in X\}$ und $\Phi(\sup_{\prec} X) = \sup_{<}\{\Phi(x)/x \in X\}$.
Zeige: Gilt für alle $e,e' \in \hat{u}$: $e \prec e'$ gdw $\Phi(e) < \Phi(e')$, so ist Φ stetig bezüglich $\prec$.

(ÜIV-23): Es sei $f: \mathbb{R}\to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{,falls } t \leq -1 \\ \sqrt{|t|} & \text{,falls } -1 \leq t \leq 0 \\ -\sqrt{|t|} & \text{,falls } 0 \leq t \leq 1 \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

(1) Zeichne f und zeige: $\lim_{t\to 0}(|f(t)|/|t|)$ existiert nicht.
(Benutze die Regel von d'Hospital und ein Lehrbuch der Analysis.)
(2) Definiere in einem Modell x der klassischen Raum-Zeit-Theorie eine Partikelbahn $i_p: R \to R$, sodaß $\lim_{t\to 0}(d_t(i_p(0),i_p(t))/|t|)$ nicht existiert. (Wähle x so, daß für alle $t,t' \in Z$: $d_t = d_{t'}$. Gib $\bar{a}_0 := i_p(0)$ beliebig vor und wähle $\bar{a}_1 \in R$ so, daß $d_0(\bar{a}_0,\bar{a}_1) > 1$. Sei $g: Z \to \mathbb{R}$ so, daß für alle $t \in Z$: $d_t(g(t),\bar{a}_0) = |f(t)|$ mit f aus Teil (1) und für $t \leq 0$: $\underline{zw}(\bar{a}_0, g(t), \bar{a}_1)$ und für $0 \leq t$: $\underline{zw}(g(t),\bar{a}_0,\bar{a}_1)$ gilt.)

(ÜIV-24): (1) Gib eine Definition der euklidischen Norm $\| \ \|$ (ÜIII-23-(1)) für den Fall von $\mathbb{R}^4$ anstelle von $\mathbb{R}^2$ und genauso für die euklidische Metrik aus ÜIII-12.
(2) Definiere mit Hilfe der euklidischen Metrik in $\mathbb{R}^4$ eine Zwischenrelation zw (vergleiche ÜIII-12).
(3) Definiere in $\mathbb{R}^4$ mittels zw aus (2) "g ist eine Gerade, die durch $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ geht" (für $\mathfrak{x},\mathfrak{y} \in G(\mathbb{R}^4), \mathfrak{x} \neq \mathfrak{y}$).

(ÜIV-25): Beweise: (1) Für $u \in W$ und $e \in \hat{u}$ gilt: $\Phi_{u_o} f_{u_o} e = 1/2(\Phi_u e + \Phi_u f_u f_{u_o} e)$
(2) Für $u,v \in W, u \neq v$ und $e \in \hat{u}$: $\Phi_v f_v e = 1/2(\Phi_u e + \Phi_u f_u f_v e)$
(3) Es gelte $u \neq u', e \in \hat{u}, e' = f_{u'}(e), v \in W, \underline{zw}_x(u,v,u')$ und $uv \equiv_x vu'$ und $d(u,u') = \alpha(\Phi_{u'}(e') - \Phi_u(e))$ mit $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt auch $d(u,v) = \alpha(\Phi_v f_v e - \Phi_u e)$
(4) Gilt $u \neq u', e \in \hat{u}, e' = f_{u'} e, v \in W, \underline{zw}_x(u,v,u')$ oder $\underline{zw}_x(u,u',v)$ und $d(u,u') = \alpha(\Phi_{u'} e' - \Phi_u e)$ für $\alpha \in \mathbb{R}^+$, so auch $d(u,v) = \alpha(\Phi_v f_v e - \Phi_u e)$
(5) Gilt $e \in \hat{u}, e' \in \hat{u}', e' = f_{u'} e, e_1 \in \hat{v}, e_1 = f_v e$ und $d(u,u') = \alpha(\Phi_{u'} e' - \Phi_u e)$ für $\alpha \in \mathbb{R}^+$, so auch $d(v,u) = \alpha(\Phi_v e_1 - \Phi_u e)$
(6) Aus $u,v \in W, e,e' \in \hat{u}$ folgt $\Phi_u f_u f_v e - \Phi_u e = \Phi_u f_u f_v e' - \Phi_u e'$
(7) Aus $u,v \in W, e,e' \in \hat{u}, e \prec e'$ folgt $\Phi_v f_v e - \Phi_u e = \Phi_v f_v e' - \Phi_u e'$
(8) Aus $u,v \in W, e \in \hat{u}$ folgt $\Phi_v f_v e - \Phi_u e = \Phi_u f_u f_v e - \Phi_v f_v e$
(9) Aus $uu' \equiv_x vv', e \in \hat{u}, e_1 \in \hat{v}$ folgt $\Phi_{u'} f_{u'} e - \Phi_u e = \Phi_{v'} f_{v'} e_1 - \Phi_v e_1$
(10) Gilt $e \in \hat{u}, e' = f_{u'} e, e_1 \in \hat{v}_1, e_2 \in \hat{v}_2, e_2 = f_{v_2} e_1$ und $d(u,u') = \alpha(\Phi_{u'} e' - \Phi_u e)$ für $\alpha \in \mathbb{R}^+$, so auch $d(v_1,v_2) = \alpha(\Phi_{v_2} e_2 - \Phi_{v_1} e_1)$
(11) Gilt $e \in \hat{u}, e' \in \hat{u}', e' = f_{u'} e, e \neq e', e_1 \in \hat{v}, e_1 \prec e_2 \in \hat{v}'$ und $d(u,u') = \alpha(\Phi_{u'} e' - \Phi_u e)$ für $\alpha \in \mathbb{R}^+$, so auch $d(v,v')$ $\alpha(\Phi_{v'} e_2 - \Phi_v e_1)$
(12) Aus $e \prec e', e \in \hat{u}, e' \in \hat{u}'$ folgt $\Phi_u e < \Phi_{u'} e'$
(13) Aus $e \in \hat{u}, e' \in \hat{u}'$ folgt $d(u,u') = \| \langle \varphi_2 e, \ldots, \varphi_4 e \rangle - \langle \varphi_2 e', \ldots, \varphi_4 e' \rangle \|$
(14) Aus $e \in \hat{u}, e' \in \hat{u}', e' = f_u e, e \neq e', e_1 \in \hat{v}, e_2 \in \hat{v}', \neg e_1 \prec e_2,$

$\neg e_2 \prec e_1, e_1 \neq e_2$ und $d(u,u') = \alpha(\Phi_{u'} e' - \Phi_u e)$ für $\alpha \in \mathbb{R}^+$ folgt $d(v,v') > \alpha|\Phi_v e_1 - \Phi_{v'} e_2|$

(15) Für $e \in \hat{u}$ gilt $\Phi_u e = \varphi_1 e$.

Kapitel V Empirische Theorien

In den vorangegangenen Kapiteln beschäftigten wir uns mit Theorien,die nicht einfach so beschrieben werden,wie dies in der einschlägigen Literatur geschieht,sondern die wir in präzisierter Form durch Angabe der Grundbegriffe und Axiome darstellten.Anhand der einzelnen Beispiele wurden jeweils implizit bestimmte wissenschaftstheoretische Begriffe behandelt. In dem vorliegende letzten Kapitel wollen wir nun diese Begriffe,die wir für wichtig halten,in abstrakter Weise einführen.Die früher behandelten Beispiele dienen dann rückwirkend auch als Beispiele für unsere abstrakten wissenschaftstheoretischen Begriffe.

Man kann gegen diese Vorgehensweise einwenden,daß sie doch ziemlich fiktiv sei,weil die "wissenschaftstheoretischen Objekte",mit denen man sich befaßt,zunächst passend zurechtgestutzt (=präzisiert) wurden,sodaß man sich nicht zu wundern brauche,wenn die vorgefaßten wissenschafstheoretischen Begriffe durch solcherart zurechtgemachte Objekte exemplifiziert würden.

Es ist nicht zu leugnen,daß wir unsere wissenschaftstheoretischen Begriffe nicht aus den diskutierten Beispielen "abstrahierten",einfach weil wir sie schon relativ fertig vorfinden.Der hier entwickelte Begriff einer empirischen Theorie wurde zuerst von J.D.Sneed in dem Buch "The Logical Structure of Mathematical Physics" [Sneed,1971] eingeführt.Stegmüller [Stegmüller,1973] und [Stegmüller,1979] machte den Ansatz im deutschsprachigen Raum bekannt und die beiden Autoren, sowie Moulines und auch der Verfasser arbeiteten seitdem weiter an der Verbesserung des Ansatzes.

Auf den obigen Einwand antworten wir durch eine Analogiebetrachtung.Wir übertragen ihn auf eine Theorie,die sich mit konkreten Objekten befaßt,nämlich auf die Mechanik.Betrachten wir etwa das Galileische Fallgesetz,nach dem für einen auf die Erde fallenden Gegenstand der zurückgelegte Weg proportional zum Quadrat der Fallzeit ist.Das Analogon zu unseren wissenschaftstheoretischen Begriffen wäre hier das Fallgesetz,das sich auch leicht als Begriff,etwa in der Form "ist eine das Fallgesetz erfüllende Mechanik" wiedergeben läßt.Der obige Einwand würde dann bei Analogisierung an den Physiker gehen und lauten,dieser würde seine physikalischen Systeme,für die er das Fallgesetz nachweist,zuerst zurechtmachen,denn für den Fall von in der Natur vorkommenden Gegenständen -etwa den Fall eines Blatt Papiers- sei das Gesetz einfach falsch. Erst wenn der Physiker den Fall in einem Fast-Vakuum durchführt und andere störende Einflüsse ausschaltet,kann das Objekt (System) unter den fraglichen Begriff fallen und dies sei auch nach solchen Vorbereitungen nicht verwunderlich.

Auf beiden Ebenen haben wir es auf der Seite der Theorie mit Idealisierungen zu tun.Die "wirklichen" Objekte,auf die man sich in der und durch die Theorie bezieht,fallen erst dann unter die Theorie,wenn man sie hinreichend stark idealisiert hat.Es gibt schon brauchbare Vorstellungen,wie Idealisierung funktioniert (siehe z.B.[Krajewski,1977]).Allerdings fehlen noch sorgfältig ausgearbeitete Beispiele,sodaß wir darauf verzichten,dieses Thema eingehend zu erörtern (wozu ein eigenes Kapitel nötig wäre).Hier sei nur darauf hingewiesen,daß man eine dem Wissenschaftler auf der Objektebene zugestandene Vorgehensweise,nämlich die der Idealisierung,dem Meta-Wissenschaftler,also dem Wissenschaftstheoretiker,schlecht wird abstreiten können.Im Gegenteil: gerade,<u>daß</u> der Wissenschaftstheoretiker genau so vorgeht,spricht <u>für</u> seine Methode im Sinne einer Homogenität (Gleichartigkeit) der empirischen Vorgehensweise auf Objekt- und Metaebene.Da wir nicht gewillt sind,Fragen der Methode,die meist normative Aspekte enthalten, nach traditionell-philosophischen Denkschemata anzugehen -was uns hier nicht fruchtbar scheint- ,bieten sich Homogenitätsaussagen,wie die gerade betrachtete,noch am ehesten zur Auszeichnung wissenschaftstheoretischer Konzepte an.

Bevor wir uns den wissenschaftstheoretischen Begriffen im Einzelnen und dem Theorienbegriff zuwenden,sei nochmals an einige formale Punkte erinnert,die in den vorhergehenden Kapiteln in den Übungsaufgaben verstreut behandelt wurden.

Jede 2-stellige Relation R läßt sich mengentheoretisch (extensional) auffassen als Teilmenge des kartesischen Produkts zweier Mengen D und D',wobei D und D' die "Objekte" enthalten,die zueinander in Relation (bzw.nicht in Relation) gesetzt werden.Also $R \subseteq D \times D'$.Eine n-stellige Relation R^n mit $n > 2$ läßt sich analog auffassen als Teilmenge des kartesischen Produktes von n Objektmengen $D_1,..,D_n$: $R^n \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$.Jede Funktion $f:D \rightarrow D'$ ist mengentheoretisch eine 2-stellige Relation $f \subseteq D \times D'$,für die die beiden folgenden Aussagen gelten:

$$\forall x \in D \; \exists y \in D' (\langle x,y \rangle \in f)$$
$$\forall x,y,z (\langle x,y \rangle \in f \wedge \langle x,z \rangle \in f \rightarrow y=z).$$

Wenn wir "$\langle x,y \rangle \in f$" lesen als "y ist der Funktionswert von f für das Argument x" (man schreibt hierfür auch "f(x)=y" oder "y=f(x)"),so besagen diese Formeln,daß jedes Element von D als Argument der Funktion auftritt und daß der Funktionswert y durch das Argument x eindeutig bestimmt ist.Für Funktionen mit mehreren Argumenten oder mit Tupeln gilt ähnliches,wobei einfach D oder D' als kartesische Produkte weiterer Mengen aufzufassen sind.

Weiter sei daran erinnert,daß mengentheoretische Formeln nichts anderes sind als Aussagen,die in der Sprache der Mengenlehre hingeschrieben werden (ÜV-1).Die Axiome empirischer Theorien kann man immer in der Sprache der Mengenlehre durch Formeln ausdrücken,wenn man geeignete Objektmengen und passende Grundbegriffe einführt.Die Situation in empirischen Theorien ist hier wesentlich verschieden von der allgemeinen Situation,die man in der Alltagssprache hat (ÜV-2).Da die meisten Theorien nur endlich viele Axiome haben,kann man -formal- alle Axiome durch Konjunktion zu einem einzigen Satz zusammenfassen und somit durch eine einzige Formel ausdrücken.

Für eine Menge D bezeichnet Pot(D) die Potenzmenge von D, d.h.die Menge aller Teilmengen von D.Ist $f:D \to D'$ eine Funktion,so definieren wir Funktionen $\bar{f}$ und $\bar{\bar{f}}$ wie folgt:

$$\bar{f}:\mathrm{Pot}(D) \to \mathrm{Pot}(D') \quad ,\bar{f}(X):=\{y/\exists x \in X(\ y=f(x))\}$$

$$\bar{\bar{f}}:\mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(D)) \to \mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(D')) \quad , \ \bar{\bar{f}}(\underline{X}):=\{Y/\exists X \in \underline{X}(Y=\bar{f}(X))\}.$$

Pot(Pot(D)) steht dabei für die Potenzmenge der Potenzmenge von D,sodaß ein Element $\underline{X}$ von Pot(Pot(D)) Teilmenge von Pot(D) ist,also eine Menge von Teilmengen von D.

Eine Äquivalenzrelation auf einer Menge D ist eine 2-stellige Relation $\sim \subseteq D \times D$,die folgende Axiome erfüllt:

$$\forall x \in D(\ x \sim x)$$
$$\forall x \forall y \in D(\ x \sim y \to y \sim x\ )$$
$$\forall x \forall y \forall z \in D(\ x \sim y \wedge y \sim z \to x \sim z\ )$$

Dabei haben wir schon die abkürzende Schreibweise $x \sim y$ für $\langle x,y \rangle \in \sim$ benutzt.Wir schreiben auch "$\sim \in$ ÄR(D)" für "$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf D".

Wenn n-Tupel ineinander verschachtelt vorkommen,so lassen wir stets alle inneren Klammern weg.Es ist dann z.B.

$$\langle\langle x,y \rangle ,z \rangle = \langle x,y,z \rangle$$
$$\langle x,\langle y \rangle ,\langle z \rangle\rangle = \langle x,y,z \rangle \quad \text{usw.}$$

POTENTIELLE MODELLE

Der erste Baustein für eine empirische Theorie ist,genau wie in den Beispielen,die Klasse aller potentiellen Modelle. Es dreht sich nun darum,in abstrakter Weise zu erklären,was die Struktur eines potentiellen Modells einer Theorie ist und worin allgemeine Züge einer Klasse potentieller Modelle bestehen.Dabei stoßen wir auf zwei Aspekte.Einmal hat jedes potentielle Modell eine bestimmte Form: es ist eine Struktur bestimmter Art.Zum anderen ist diese Form für alle potentiellen Modelle einer Theorie die gleiche.Diese Form bezeichnen wir auch als den Typ der potentiellen Modelle.

Wir bemerken hier,daß die folgenden Definitionen in einem bestimmten Punkt etwas speziell gefaßt sind,was sich letzten

Endes auch auf den Theoriebegriff überträgt.Wir lassen nämlich in potentiellen Modellen nur solche Relationen zu,die zwischen Grundobjekten bestehen,d.h. es werden Relationen ausgeschlossen,die zwischen Mengen von Grundobjekten oder noch komplizierteren mengentheoretischen Gebilden bestehen.Prädikatenlogisch gesehen kann man solche potentiellen Modelle immer als Interpretationen einer Sprache erster Stufe (eventuell mit mehreren Sorten) auffassen.(Das impliziert nicht,daß sich eine solche Theorie auch in der ersten Stufe axiomatisieren läßt; bei "Stetigkeitsaxiomen" braucht man immer Quantoren höherer Stufe.) Der durch diese Einschränkung gewonnene Vorteil an Einfachheit ist enorm.Es handelt sich auch um keine wesentliche Einschränkung,solange wir empirische Theorien -wie dies heute allgemein üblich ist- so betrachten,daß eventuell darin vorkommende mathematische Strukturen unkritisch vorausgesetzt werden.Denn uns ist keine empirische Theorie bekannt, deren nicht-mathematische Axiome man nicht -eventuell mit leichten Umformungen- in der ersten Stufe ausdrücken könnte. Der einzig wesentliche Punkt,an dem man bei Beschreibung potentieller Modelle Formeln höherer Stufe (d.h.mit Quantifikation über Prädikate) braucht,ist bei der Formulierung mathematischer Axiome,wie sie in der Geoemtrie,in der Theorie der reellen Zahlen und bei Grenzwert- und Stetigkeitsbetrachtungen vorkommen.Mit diesen Axiomen sind Grundlagenprobleme der Mathematik verbunden,die hier nicht angeschnitten werden. Ob sich diese Grundlagenprobleme der Mathematik in irgeneiner Weise auf die Behandlung empirischer Theorien auswirken,läßt sich zur Zeit nicht absehen,insbesondere wegen der schon angesprochenen vorherrschenden Tendenz,mathematische Strukturen, soweit sie in empirischen Theorien auftreten,zu isolieren und unkritisch vorauszusetzen.Im Fall der Geometrie zeigt die Behandlung in [Balzer,1978],daß eine adäquate Auffassung der Geometrie als empirischer Theorie auf das Vollständigkeitsaxiom in der Charakterisierung der potentiellen Modelle verzichten kann.Es wird in die Formulierung der Querverbindungen verlegt,die ja ohnehin Quantoren über potentielle Modelle (also Quantoren höherer Stufe) enthalten.

<u>DV-1</u> Sind $D_1,..,D_k$ Mengen,so ist f eine <u>Relation über $D_1,..,D_k$</u> gdw f eine Teilmenge des kartesischen Produkts irgendwelcher der D_i ist,d.h.wenn es $i_1,..,i_n \in \{1,..,k\}$ gibt,sodaß

$$f \subseteq \prod_{j \leq n} D_{i_j}$$

Hierbei kann unter Umständen $n > k$ sein.Es ist durchaus Vorgesehen,daß das gleiche D_i mehrmals im kartesischen Produkt auftritt.Zum Beispiel ist die Zwischenrelation <u>zw</u> der Geometrie eine dreistellige Relation über der Menge R der Raumpunkte,nämlich <u>zw</u> $\subseteq R \times R \times R$.Im Sinne der allgemeinen Definition DV-1) wäre hier k=1,n=3 und $i_1=i_2=i_3=1$ zu wählen.Denn dann ist $\prod_{j \leq n} D_{i_j} = D_1 \times D_1 \times D_1$ und speziell für $D_1=R$ sieht man,daß <u>zw</u> eine Relation über R ist (ÜV-3).

<u>DV-2</u> x ist eine <u>Struktur</u> gdw es $D_1,..,D_k$ und $f_1,..,f_m$ gibt, sodaß

1) $x=\langle D_1,..,D_k;f_1,..,f_m\rangle$
2) $D_1,..,D_k$ sind nicht-leere Mengen
3) für alle $i \leq m$ gilt: f_i ist eine Relation über $D_1,..,D_k$

Implizit enthält DV-2) die Voraussetzung,daß die Zahlen k und $m \geq 1$ sind.Die Mengen $D_1,..,D_k$ sind vorzustellen als Mengen der Grundobjekte,von denen die Rede ist,die aber ihrerseits keiner weiteren Analyse unterzogen werden.Grundobjekte sind etwa psychische Akte in der Psychologie,Raumpunkte in der Geometrie und Güterarten in der Ökonomie.Zwischen den Objekten verschiedener solcher Objektmengen bestehen in einer Struktur verschiedene Relationen $f_1,..,f_m$.Da k und $m \geq 1$ sind,enthält jede Struktur mindestens eine Menge von Grundobjekten D_1 und mindestens eine Relation f_1 zwischen Grundobjekten.f_1 darf auch 1-stellig sein,sodaß als "einfachste" Struktur eine Entität $\langle D;f\rangle$ in Frage kommt,für die D eine nicht-leere Menge und $f \subseteq D$ ist.Dabei betrachten wir 1-stellige Relationen als ausgeartete Fälle "normaler" Relationen (ÜV-4).

Damit haben wir auch schon die Form eines potentiellen Modells festgelegt,soweit sie an einem einzelnen potentiellen Modell auszumachen ist.Eine Klasse potentieller Modelle für eine Theorie wird jedoch nur solche potentiellen Modelle (Strukturen) enthalten,die von gleichem Typ sind.Dieser Begriff wird wie folgt definiert.

DV-3 Es seien $D_1,..,D_k$ und $D'_1,..,D'_n$ Mengen und $k\leq n$.Weiter sei f eine Relation über $D_1,..,D_k$ und f' eine Relation über $D'_1,...,D'_n$.

f und f' sind von gleichem Typ gdw es $i_1,..,i_m \in \{1,..,k\}$ gibt,sodaß $f \subseteq \prod_{j\leq m} D_{i_j}$ und $f' \subseteq \prod_{j\leq m} D'_{i_j}$

Die Hauptidee dieser Definition ist,daß f und f' Teilmengen kartesischer Produkte sind,die "in gleicher Weise" aus irgendwelchen Grundmengen gebildet werden."In gleicher Weise" heißt, daß die Indizes bei den kartesischen Produkten gleich sind und auch in gleicher Reihenfolge auftreten.Man könnte sagen,daß beide kartesischen Produkte nach dem gleichen Schema gebildet werden.Für dieses Schema ist es irrelevant,wie die Grundmengen,von denen ausgegangen wird,aussehen.

Betrachten wir als Beispiel Grundmengen D_1,D_2 und D'_1,D'_2,D'_3, sowie eine Relation f über D_1,D_2 ,etwa $f\subseteq D_1 \times D_1 \times D_2$.Wie muß eine Relation f' über D'_1,D'_2,D'_3 beschaffen sein,damit f und f' von gleichem Typ sind? Da die Indizierung des kartesischen Produkts bei f schon festliegt,nämlich $n=3,i_1=1,i_2=1$ und $i_3=2$, muß $f' \subseteq D'_1 \times D'_1 \times D'_2$ sein (ÜV-5).

Anstelle der Forderung $k\leq n$ in der Voraussetzung von DV-3) hätte man ohne wesentlichen Verlust an Allgemeinheit auch k=n fordern können.Da die Definition hierdurch nicht einfacher wird,bleiben wir bei der allgemeineren Formulierung.Daß zwei Strukturen von gleichem Typ sind,läßt sich wie folgt definieren.

DV-4 Es seien $x=\langle D_1,..,D_k;f_1,..,f_m\rangle$ und $x'=\langle D'_1,..,D'_n; f'_1,..,f'_s\rangle$ zwei Strukturen.
x und x' sind von gleichem Typ gdw
1) k=n und m=s
2) für alle $i\leq m$ gilt: f_i ist von gleichem Typ wie f'_i

Gleichheit des Typs von Strukturen und somit auch der Typ selbst hängt nach DV-4) von drei Faktoren ab: erstens von der

Anzahl der Grundmengen, zweitens der Anzahl der Relationen und drittens vom Typ der Relationen, d.h. davon, wie die Relationen über den Grundmengen formal (schematisch) aufgebaut sind, oder anders gesagt, wie die Komponenten von Tupeln, die Elemente der Relationen sind, der Reihenfolge nach auf die verschiedenen Grundmengen verteilt sind (ÜV-6).

Zum besseren Verständnis ist vielleicht ein Gegenbeispiel nützlich. Betrachten wir die zwei Strukturen $<D_1, D_2; f>$ mit $f \subseteq D_1 \times D_2$ und $<D_1', D_2'; f'>$ mit $f' \subseteq D_2' \times D_1'$. Diese Strukturen sind nicht von gleichem Typ, denn die Indizes in dem kartesischen Produkt, dessen Teilmenge f' ist, bilden eine andere Folge -nämlich <2,1>- als die Indizes im kartesischen Produkt, von dem f eine Teilmenge ist -nämlich <1,2>.

Eine Klasse potentieller Modelle für eine Theorie ist nun einfach eine Klasse von Strukturen gleichen Typs.

<u>DV-5</u> M_p ist eine <u>Klasse potentieller Modelle für eine Theorie</u> gdw
1) M_p ist eine Klasse von Strukturen
2) alle Strukturen in M_p sind von gleichem Typ

Diese Definition umfaßt auch Strukturen, in denen Funktionen vorkommen, weil, wie schon gesagt, Funktionen einfach Relationen mit besonderen Zusatzeigenschaften sind (ÜV-7).

MODELLE

<u>DV-6</u> M ist eine <u>Klasse von Modellen für</u> M_p gdw
1) M_p ist eine Klasse potentieller Modelle für eine Theorie
2) $M \subseteq M_p$

DV-6) enthält eine sehr allgemeine Charakterisierung von Modellen für eine Theorie, wenn schon feststeht, wie die potentiellen Modelle dieser Theorie aussehen. Die Modelle bilden dann einfach eine Teilklasse der Klasse der potentiellen Modelle.

In konkreten Beispielen ist die Klasse M in der Regel durch bestimmte Axiome charakterisiert. Die Axiome enthalten Bedingungen an potentielle Modelle, in denen die Komponenten der potentiellen Modelle miteinander in Verbindung gebracht werden.Die Axiome werden also typischerweise über zwei oder mehrere Relationen,die in potentiellen Modellen vorkommen,reden.Der Grenzfall,in dem ein Axiom nur eine Relation charakterisiert,ist zugelassen.

Wir ziehen keine klare Trennungslinie zwischen potentiellen Modellen und Modellen.Es gibt sicher mehrere Möglichkeiten, eine derartige Abgrenzung vorzunehmen.Aber die derzeit bekannten Rekonstruktionen empirischer Theorien vertragen sich nicht gut mit solchen Abgrenzungskriterien.Man kann zum Beispiel fordern,daß in den potentiellen Modellen die Relationen <u>nur</u> bezüglich ihres Typs festgelegt werden.Das heißt,die einzige Information,die man in potentiellen Modellen über eine Relation f_i hat,ist,daß $f_i \subseteq \prod_{j \leq m} D_{s_j}$.Alle weitergehenden Forderungen an f_i wären in die Modelle zu verlegen.Eine solch strenge Forderung gerät in Konflikt mit Rekonstruktionen,bei denen gewisse mathematische Komponenten in den potentiellen Modellen durch mathematische Axiome charakterisiert werden. Diese mathematischen Axiome möchte man nicht alle erst bei Charakterisierung der Modelle hinschreiben,weil die Axiome, die die Modelle charakterisieren,doch die "empirischen" Axiome der Theorie sein sollen.Der Unterschied zwischen"mathematischen" und "empirischen" Axiomen ist aber fließend.

Eine andere Abgrenzungsmöglichkeit besteht darin,bei den potentiellen Modellen nur solche Charakterisierungen für die Relationen f_i zuzulassen,in denen jeweils ein einzelnes f_i (eventuell unter Bezugnahme auf die Grundmengen $D_1,\ldots,D_k$) näher bestimmt wird. Alle und genau die Axiome,in denen von mehr als einer Relation die Rede ist,würden dann zur Auszeichnung der Modelle dienen.Diese Abgrenzung hat einen ziemlich pragmatischen Charakter,weil es kaum möglich sein dürfte, die Axiome einer Theorie sauber in zwei Klassen zu zerlegen, sodaß jedes Axiom der einen Klasse über genau eine Relation redet und jedes Axiom der zweiten Klasse über mindestens zwei Relationen.Denn es gibt immer logisch äquivalente Axiomensysteme,in denen bei gleichen Relationen die erwähnten Klassen variieren (ÜV-8). Die Unterscheidung ist also nur relativ zu einer fest vorgegebenen Axiomatisierung möglich.Im Prinzip scheint die erste Alternative klarer und auch für andere Untersuchungsbereiche -etwa Probleme der Invarianz- erfolgversprechender.Wir verzichten aber auf eine Festlegung,um nicht viele existierende Rekonstruktionen von unserem Theorienbegriff auszuschließen.

Es ist zu bemerken,daß die Charakterisierung von Modellen gemäß DV-6) äußerst schwach ist.Sie bietet keinen Angriffspunkt für Argumente,wie sie etwa in den Sozialwissenschaften vorgebracht werden,wonach sozialwissenschaftliche Theorien nicht axiomatisierbar seien.Unsere Bemerkungen über Axiome im letzten Absatz haben in Bezug auf DV-6) lediglich heuristischen Wert.In DV-6) ist <u>nicht</u> gefordert (und durch DV-6) auch nicht impliziert),daß die Modelle einer Theorie,also die Elemente von M,durch Axiome charakterisiert sind.Die einzige echte Forderung,die in DV-6) und DV-5) enthalten ist,betrifft Anzahl und Typen der Grundbegriffe.Es wird gefordert,daß mit einer Theorie eine bestimmte Anzahl von Grundbegriffen (Objektmengen und Relationen) gegeben sind und daß die Relationen einen festen Typ haben.Sicher gibt es in der wissenschaftlichen Praxis Beispiele,in denen auch diese Forderungen nicht erfüllt sind.Wenn etwa ein Wissenschaftler einen bestimmten Relationsausdruck,z.B.den Ausdruck "vermittelt" einmal als 1-stellig,sodann aber im selben Kontext auch als 2- und 3-stellig benutzt,so ist es in der Tat schwierig,aus dieser Praxis eine Theorie zu rekonstruieren,zu der potentielle Modelle und Modelle gehören.Ob eine solche Praxis als wissenschaftlich zählen soll,mag der Leser für sich selbst entscheiden.

Um den Zusammenhang zwischen Axiomen und Modellklassen,den wir später noch brauchen,durch eine bestimmte Bezeichnung zu fixieren,führen wir die folgende Hilfsdefinition ein.

<u>DV-7</u> Sei A eine mengentheoretische Formel und M_p eine Klasse potentieller Modelle für eine Theorie.

1) S(A) sei die Klasse aller Strukturen,die die Formel A erfüllen
2) A <u>hat den Typ von</u> M_p gdw $S(A) \subseteq M_p$

Am Beispiel der Freudschen Theorie sei etwa A die Konjunktion aller Axiome aus Kap.I. S(A) wäre dann die Klasse aller potentiellen Modelle,in denen diese Axiome gelten.Der zweite Teil von DV-7) stellt einen Zusammenhang her zwischen der Struktur potentieller Modelle und dem Typ der Entitäten,auf die eine Formel A zutrifft.Wir sagen,A habe den gleichen Typ wie die Entitäten (die Strukturen),auf die A zutrifft.

THEORETIZITÄT UND PARTIELLE MODELLE

Bis zum Ende dieses Abschnitts sei durchweg $T^*=\langle M_p,M\rangle$ fest vorgegeben,wobei M_p eine Klasse potentieller Modelle der Gestalt $\langle D_1,..,D_k;f_1,..,f_m\rangle$ für eine Theorie ist und M eine Klasse von Modellen für M_p.T^* ist selbst keine echte Theorie, sondern Fragment einer Theorie,weshalb wir zur Bezeichnung ebenfalls den Buchstaben T,der später für Theorien verwandt wird,benutzen.Weiter sei $i \in \{1,..,m\}$ in diesem Abschnitt eine bestimmte,fest vorgegebene Zahl.

Unser Ziel ist,eine genauere und abstrakte Formulierung des Theoretizitätskriteriums zu liefern,das in den Kapiteln I und II informell angedeutet wurde.Die Idee war,eine Komponente -in diesem Abschnitt immer die i-te Relation der Strukturen in M_p- als theoretisch zu bezeichnen,wenn jede Messung dieser Komponente voraussetzt,daß irgendeine Struktur aus M_p schon ein Modell der Theorie,also ein Element von M, ist.Um diese Idee zu präzisieren,müssen wir etwas über Messung und über Eindeutigkeit sagen.Zur Formulierung von Eineutigkeitsaussagen erweist sich folgende Notation als zweckmäßig.

<u>DV-8</u> Ist $x \in M_p$ eine Struktur der Form $x=\langle D_1,..,D_k;f_1,..,f_m\rangle$, ist $f_i^!$ eine Relation über $D_1,..,D_k$ und sind f_i und $f_i^!$ von gleichem Typ,so sei

$$x[f_i^!] :=\langle D_1,..,D_k;f_1,..,f_{i-1},f_i^!,f_{i+1},..,f_m\rangle$$

$x[f_i^!]$ ist also die Struktur,die aus x dadurch entsteht,daß man für die i-te Komponente -um deren Theoretizität es sich hier stets dreht- eine Komponente $f_i^!$ gleichen Typs einsetzt.Mit Hilfe von DV-8) können wir nun sagen,was es heißt,daß eine Formel A die i-te Relation in M_p eindeutig bestimmt.

<u>DV-9</u> Sei A eine mengentheoretische Formel.

A <u>bestimmt die i-te Relation in</u> M_p <u>eindeutig</u> gdw

1) A hat den Typ von M_p
2) für alle x und alle f_i':
   wenn $x[f_i] \in S(A)$ und $x[f_i'] \in S(A)$, dann $f_i = f_i'$

In DV-9) ist natürlich $x[f_i]$ identisch mit x.Wir haben f_i hier nur explizit gemacht,um das Verständnis zu erleichtern. DV-9-2) ist eine Eindeutigkeitsaussage für die i-te Komponente oder Relation f_i von x.Wenn diese Forderung erfüllt ist,so kann es keine zwei verschiedenen f_i und f_i' geben,für die $x[f_i]$ und $x[f_i']$ beide in S(A) liegen.Bedingung 1) stellt sicher,daß $x[f_i]$ und $x[f_i']$ auch geeignete Kandidaten sind,von denen man fragen kann,ob sie in S(A) liegen oder nicht.Wir können nun sagen,wann eine Formel A eine Meßmethode beschreibt.

<u>DV-10</u> A <u>beschreibt eine Meßmethode für die i-te Relation in</u> M_p gdw

1) A ist eine mengentheoretische Formel
2) A bestimmt die i-te Relation in M_p eindeutig
3) A ist eine Übersetzung von Formeln und Gleichungen,die in existierenden Darstellungen der zu T^* gehörigen informellen Theorie vorkommen,in die Sprache der Mengenlehre

Dieser Definition liegt folgende Vorstellung zugrunde.Unter den Strukturen aus M_p kommen alle realen Systeme -als Strukturen aufgefaßt- vor,auf die die Theorie anwendbar ist.Eine reale Messung der Größe f_i ist nur in realen Systemen möglich, auf die die Theorie angewandt werden kann.Das heißt der Vorgang der Messung ("das,was sich während der Messung abspielt") bildet,durch die Brille der Theorie betrachtet,ein potentielles Modell.Nun unterscheiden sich solche potentiellen Modelle,die bei Messungen realisiert werden,"irgendwie" von beliebigen potentiellen Modellen.Dieses "irgendwie" muß man durch spezielle Eigenschaften angeben,die die Meßsysteme haben,die ein beliebiges System aber nicht zu haben braucht. Normalerweise wird man sagen,daß solche Eigenschaften von Meßsystemen daher kommen,daß man diese Systeme in bestimmter

Weise präpariert hat,nämlich in Befolgung geeigneter Vorschriften zum Aufbau des Experiments.Da wir nicht über Vorschriften und Regeln reden wollen,müssen wir versuchen,eine äquivalente Ausdrucksmöglichkeit im Vokabular der Theorie zu finden.Dies geschieht durch den Trick der Identifikation einer Regel mit den Ergebnissen der Anwendung dieser Regel,den wir schon in Kap.I benutzten.Wir identifizieren (nur im vorliegenden Kontext und nur für diesen Zweck!) eine Regel,eine Vorschrift zum Versuchsaufbau und zur Versuchsdurchführung, mit den Resultaten,zu denen eine korrekte Anwendung der Regel führt.In unserem Fall besteht die Regel in der Methode,nach der die Messung durchzuführen ist,d.h.in der Meßmethode.Wir identifizieren nun einfach diese Methode mit allen Systemen (potentiellen Modellen),die man durch korrekte Befolgung der Methode erhält.All diese Systeme haben -das unterstellen wir- eine charakteristische Eigenschaft,die man durch eine mengentheoretische Formel A wiedergeben kann.A entspricht dann der betrachteten Meßmethode,indem A genau auf alle korrekten Durchführungen der Methode zutrifft.Man darf sich A also nicht als direkte Formulierung der bei der Messung zu befolgenden Regeln vorstellen.Vielmehr beschreibt A die Resultate von korrekten Anwendungen der Meßmethode.Die Wendung "beschreibt eine Meßmethode" in DV-10) ist also genauer in diesem übertragenen Sinn zu verstehen.

Eine Beschreibung A enthält zwei Züge.Erstens bestimmt sie die zu messende Relation eindeutig.Das heißt,wenn eine Struktur durch A beschrieben wird ("die Eigenschaft A hat"),daß f_i in dieser Struktur durch die restlichen Komponenten (Relationen) eindeutig bestimmt ist.Wenn wir die anderen Komponenten f_j mit $j \neq i$ kennen,so können wir,wenn A erfüllt ist,f_i ermitteln,denn f_i ist ja eindeutig festgelegt.Durch diese Bedingung allein würden aber noch zu viele Beschreibungen zugelassen.Man überlegt sich leicht Beispiele von Formeln,die zwar die Eindeutigkeitsbedingung erfüllen,die aber keine anerkannten Meßmethoden darstellen.Das kann zum Beispiel daran liegen,daß die Eindeutigkeit durch mathematische Tricks erzwungen wird,die im Lichte der Theorie keinen realen Gehalt haben (ÜV-9).Deshalb müssen wir Forderung DV-10-3) hinzunehmen,die eine pragmatische Komponente ins Spiel bringt.Wir müssen fordern,daß die Beschreibung A der Meßmethode von den mit der Theorie arbeitenden Wissenschaftlern anerkannt wird. Wir haben dies so formuliert,daß A eine Übersetzung von anerkannten Formeln und Gleichungen in die Sprache der Mengenlehre sein soll.Und daß Formeln und Gleichungen anerkannt sind,kann man daran sehen,daß sie in existierenden Darstellungen,z.B.in Lehrbüchern,Zeitschriftenartikeln,Vorträgen,Vorlesungen usw. vorkommen und verwandt werden.Die zu T^* gehörende informelle Theorie ist dabei diejenige Theorie,bei deren Rekonstruktion wir M_p und M als Klassen potentieller Modelle und Modelle erhalten.Da man M_p und M immer erst ausgehend von einer bestimmten informellen Theorie erhält,können wir von <u>der</u> zu T^* gehörigen Theorie reden.Wir geben zu,daß der Begriff der existierenden Darstellung etwas vage ist.Es ist schwierig,die existierenden Darstellungen einer Theorie zu überschauen, selbst wenn man sich auf einen bestimmten historischen Zeitraum oder gar Zeitpunkt beschränkt.Andererseits liegen die Schwierigkeiten hierbei allein an unseren geringen Fähigkeiten,ein großes Datenmaterial zu überblicken.Wenn man beschließt,solche Darstellungen,die etwa nur in den Köpfen einzelner Wissenschaftler existieren,auszuschließen und sich auf in irgendeiner verbreiteten Sprache formulierte Aufzeichnungen beschränkt,so sind die existierenden Darstellungen einer Theorie zu einem bestimmten Zeitpunkt ziemlich fest umrissen. Daß wir sie nicht kennen oder schlecht überblicken,ist hiergegen kein Einwand.

Weiter ist klar,daß wir in DV-10) von einer Meß<u>methode</u> reden müssen und nicht von einer einzelnen Messung.Denn eine mengentheoretische Formel kann immer nur allgemeine Sachverhalte beschreiben.Jede Realisierung der Formel ist,vom Standpunkt des Inhalts,den die Formel ausdrücken soll,gleich zu bewerten.Aber natürlich interessiert man sich im Kontext von Messung auch nicht für einzelne,raum-zeitlich begrenzte Messungen,sondern für Meßmethoden,die man zu verschiedenen Zeiten an verschiedenen Orten anwenden kann.Jede Durchführung einer solchen Methode liefert eine konkrete Messung.Und die dabei realisierten Komponenten bilden eine Struktur,die man als Meßmodell bezeichnen kann.

DV-11 x ist ein Meßmodell für die i-te Relation in T^* gdw es A gibt, sodaß gilt:

1) A beschreibt eine Meßmethode für die i-te Relation in M_p
2) $x \in S(A)$

Ein Meßmodell ist also eine Struktur, die eine Formel A erfüllt, wobei A eine Meßmethode für die i-te Relation beschreibt.

Die Idee, daß die i-te Komponente theoretisch ist, wenn jede Messung dieser Komponente die Theorie schon voraussetzt, läßt sich nun ausdrücken durch die Forderung, daß jedes Meßmodell für die i-te Relation schon ein Modell ist.

DV-12 Die i-te Relation (in T^*) ist T^*-theoretisch gdw für alle x gilt:
wenn x ein Meßmodell für die i-te Relation in T^* ist, dann ist $x \in M$

Die Idee hierbei ist, daß eine Messung der i-ten Komponente in einem potentiellen Modell nur erfolgen kann, indem ein Meßmodell realisiert wird. Dieses Meßmodell kann im Grenzfall mit dem untersuchten potentiellen Modell identisch sein. Im allgemeinen wird es jedoch aus einem Meßapparat bestehen, der mit dem untersuchten potentiellen Modell oder mit Teilen desselben in Wechselwirkung gebracht wird. Wenn die i-te Relation gemäß DV-12) T^*-theoretisch ist, dann ist der Meßapparat, d.h. das Meßmodell bereits ein Modell der Theorie, sodaß für die Messung die Gültigkeit der Axiome der Theorie vorausgesetzt werden muß. Würden die Axiome der Theorie für den Meßapparat nicht gelten, so wäre er kein Meßmodell und folglich der gesuchte Meßwert nicht eindeutig bestimmt. Man könnte in diesem Fall nicht mehr von Messung reden.

Mit Hilfe dieses präzisierten Theoretizitätskriteriums läßt sich auch das früher diskutierte Problem der theoretischen Terme formulieren. Es ergibt sich aus der Annahme, daß die intendierten Anwendungen der Theorie die Form potentieller Modelle haben. Will man unter dieser Annahme eine empirische Behauptung in der Form $I^* \subseteq M$ formulieren (wobei $I^* \subseteq M_p$), so ist diese Behauptung nicht widerlegungsfähig und auch nicht bestätigungsfähig.Denn um sie zu bestätigen oder zu widerlegen, muß man die theoretischen Komponenten in Elementen von I^* bestimmen (messen) und aufgrund von DV-12) ist dies nur möglich,wenn schon vorausgesetzt wird,daß bestimmte potentielle Modelle (die Meßmodelle) bereits Modelle sind.Dies führt zu einem Zirkel oder unendlichen Regreß (ÜV-10).

Wir nehmen an,daß DV-12) eine klare Unterscheidung der Relationen $f_1,..,f_m$ in T^*-theoretische und nicht-T^*-theoretische liefert.Dazu prüft man für alle $i=1,..,m$ nach,ob die i-te Relation im Sinne von DV-12) T^*-theoretisch ist oder nicht.Diese Frage läßt sich,zumindest theoretisch,entscheiden, wenn man einen Überblick über alle Meßmethoden und deren Beschreibungen hat.Praktisch kann die Anwendung von DV-12) zu Schwierigkeiten führen,eben gerade,weil man diesen Überblick meist nicht hat.Ungeachtet der praktischen Schwierigkeiten kann man das Theoretizitätskriterium jedoch benutzen,um die partiellen Modelle zu definieren.Und diese braucht man zur Formulierung einer empirischen Behauptung,welche das Problem der theoretischen Terme vermeidet.

<u>DV-13</u> Sei $x \in M_p, x=\langle D_1,..,D_k;f_1,..,f_m\rangle$.
R(x) (<u>das Redukt von</u> x) wird definiert als diejenige Struktur $\langle D_1,..,D_k;f_{i_1},...,f_{i_n}\rangle$ $(n \leq m)$, die aus x entsteht,wenn man alle theoretischen Relationen in x wegläßt

Ist z.B. $x=\langle D_1,..,D_k;f_1,..,f_5\rangle$ und sind f_2 und f_4 theoretisch, so ist $R(x)=\langle D_1,..,D_k;f_1,f_3,f_5\rangle$.Wir setzen also nicht voraus, daß die theoretischen Komponenten in den potentiellen Modellen schon säuberlich von den nicht-theoretischen getrennt aufgeführt sind.Eine solche Trennung ist ja auch erst dann möglich,wenn man weiß,welche der Komponenten theoretisch sind.

<u>DV-14</u> M_{pp} ist die <u>Klasse der</u> (<u>bezüglich</u> M_p <u>und</u> M) <u>partiellen Modelle</u> gdw
$M_{pp}=\{R(x)/x \in M_p\}$

Partielle Modelle erhält man also aus potentiellen Modellen durch Weglassung der theoretischen Komponenten.

Im Anschluß an die Unterscheidung zwischen theoretischen und nicht-theoretischen Komponenten führen wir noch einige Hilfsdefinitionen ein, die später gebraucht werden.

DV-15 a) $r:M_p \rightarrow M_{pp}$ wird definiert durch $r(x):=R(x)$

b) $\bar{r}:Pot(M_p) \rightarrow Pot(M_{pp})$ und

$\bar{\bar{r}}:Pot(Pot(M_p)) \rightarrow Pot(Pot(M_{pp}))$ seien die natürlichen Fortsetzungen von r (vergleiche den Anfang dieses Kapitels)

c) für $y \in M_{pp}$ sei $e(y):=\{x \in M_p / r(x)=y\}$

d) für $x \in M_p$ sei $E(x):=e(r(x))$

r ist eine Funktion, die jedem potentiellen Modell sein Redukt zuordnet. $\bar{r}$ und $\bar{\bar{r}}$ übertragen diese Funktion auf mengentheoretisch höhere Ebenen. e(y) heißt Menge der theoretischen Ergänzungen von y. E(x) ist die Menge aller theoretischen Ergänzungen des Reduktes von x. Die Mengen E(x) mit $x \in M_p$ bilden eine Klasseneinteilung auf M_p, sodaß man E(x) als die Äquivalenzklasse von x ansehen kann, die unter der Äquivalenzrelation "hat das gleiche Redukt wie" zu bilden ist. Alle Entitäten in DV-15) sind definiert relativ zu vorgegebenen Klassen M_p und M. Wollen wir diese Relativierung zum Ausdruck bringen, so benutzen wir entsprechende Indizes. Haben wir es etwa mit Klassen M_p' und M' zu tun, so schreiben wir r', E' usw.

QUERVERBINDUNGEN

Die Querverbindungen beinhalten Beziehungen zwischen verschiedenen Modellen oder potentiellen Modellen. Ihre sprachliche Formulierung durch Axiome erfordert also Quantoren über Modelle, d.h. Quantoren höherer Stufe. Allgemein behandeln wir Querverbindungen wie folgt. Wir bilden Mengen potentieller Modelle, sodaß zwischen je zwei Strukturen einer solchen Menge die Querverbindung besteht. Eine derartige Menge $X \subseteq M_p$ nennen wir eine "zulässige Kombination". Die Querverbindung wird nun beschrieben durch Angabe aller zulässigen Kombinationen, d.h. aller Teilmengen $X \subseteq M_p$, in denen die Querverbindung gilt. Die Querverbindung wird intuitiv also nicht inhaltlich beschrieben, sondern extensional durch Angabe der Mengen potentieller Modelle, in denen sie besteht.

DV-17 Sei M_p eine Klasse potentieller Modelle für eine Theorie. Q ist eine Querverbindung für M_p gdw

1) für alle X: wenn $X \in Q$, dann $X \subseteq M_p$
2) $Q \neq \emptyset$
3) $\emptyset \notin Q$
4) für alle $x \in M_p$: $\{x\} \in Q$
5) für alle X,Y: wenn $X \in Q$ und $Y \subseteq X$, dann $Y \in Q$

Bedingungen 2) und 3) sind rein technischer Natur. Die empirische Behauptung (siehe unten) einer Theorie mit leerem Q wäre immer falsch. Da man denselben Effekt auch erzielen kann, indem man die Klasse der Modelle als leer ansetzt, kann man diese Möglichkeit bei den Querverbindungen ausschließen. Mit der gleichen Überlegung läßt sich auch 3) rechtfertigen. Bedingung 4) soll ausdrücken, daß Q nur interessant wird für "echte" Kombinationen von zwei oder mehr Strukturen. Die "unechten" Kombinationen $\{x\}$ mit $x \in M_p$ sollen als der triviale Spezialfall alle dazugehören. Weiter beinhaltet Bedingung 4) Aspekte einer "Arbeitsteilung" zwischen Modellen und der Querverbindung. Ohne Bedingung 4) könnte man die empirische Behauptung einer Theorie in äquivalenter Weise so formulieren, daß die Modelle dabei nicht mehr benutzt werden (ÜV-11). Ohne Bedingung 4) könnte man nämlich Q so wählen, daß genau die einelementigen Mengen $\{x\}$ zu Q gehören, für die $x \in M$ gilt. Dann wäre alle Information, die M liefert, schon in Q enthalten. Bedingung 5) schließlich ist eine Art Transitivitätsforderung. Wenn eine Menge X eine zulässige Kombination ist, so soll dies auch für jede Teilmenge Y von X gelten.

Die letzte Bedingung ist typisch für Identitäts-Querverbindungen. Darunter verstehen wir Querverbindungen, die zum Ausdruck bringen, daß in verschiedenen potentiellen Modellen auftretende Objekte dort "gleiche" Eigenschaften haben. Als Beispiel denke man an die Querverbindung in der Ökonomie, in der gefordert wird, daß eine Person, die in zwei ökonomischen Systemen auftritt, dort die gleiche Nutzenfunktion hat.

Wir bemerken, daß es mehrere Arten von Querverbindungen gibt, die mit ganz unterschiedlichen Intuitionen verbunden sind. Neben den angesprochenen Identitäts-Querverbindungen gibt es solche,die idealisierende Wirkung haben,indem sie die Existenz von hinreichend vielen potentiellen Modellen fordern.Weiter gibt es Querverbindungen,die bei der Formulierung von Invarianzen eine Rolle spielen.Schließlich kann man auch sogenannte Extensivitätsbedingungen durch Querverbindungen ausdrücken (ÜV-12). Von all diesen verschiedenen Intuitionen soll mit DV-17) nur die erste angesprochen sein.Wir beschränken uns auf Identitäts-Querverbindungen,da sie am häufigsten vorkommen.Für die anderen Arten von Querverbindungen gibt es noch kaum rekonstruierte Beispiele und es ist nicht klar,ob sie sich nicht besser auf andere Weise behandeln lassen.

THEORIE-KERNE

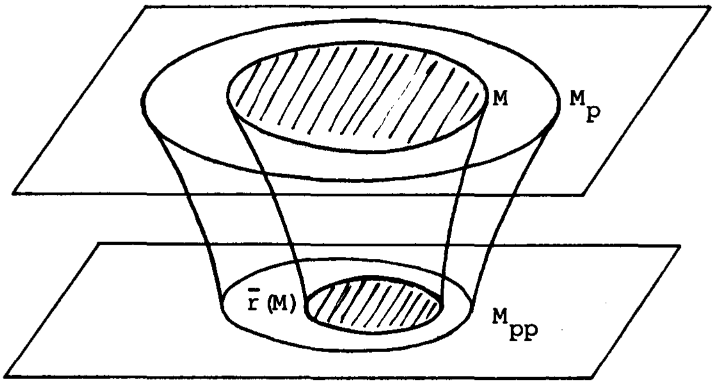
Mit den bisherigen Strukturklassen haben wir alle Komponenten beisammen,die den formalen Kern einer Theorie ausmachen. Ein Kern enthält vier Komponenten: erstens eine Klasse potentieller Modelle für eine Theorie,zweitens eine Klasse von Modellen,drittens eine Unterscheidung zwischen theoretischen und nicht-theoretischen Termen,die sich am besten durch Einführung der Klasse der nicht-theoretischen,partiellen Modelle ausdrücken läßt und viertens die Querverbindungen,die durch eine Klasse von Mengen potentieller Modelle gegeben sind.

<u>DV-18</u> K ist ein <u>Kern für eine Theorie</u> gdw es M_p,M,M_{pp} und Q gibt,sodaß

1) $K=\langle M_p,M,M_{pp},Q\rangle$
2) M_p ist eine Klasse potentieller Modelle für eine Theorie
3) M ist eine Klasse von Modellen für M_p
4) M_{pp} ist die Klasse der bezüglich M_p und M partiellen Modelle
5) Q ist eine Querverbindung für M_p

Wie schon früher angedeutet,kann man sich einen Kern als Instrument zur Auswahl bestimmter Strukturklassen vorstellen. Ein Kern K enthält nicht weniger als drei verschiedene Auswahlmöglichkeiten.Erstens kann man mittels K aus der Klasse der potentiellen Modelle eine Teilklasse auswählen,nämlich die der Modelle.Zweitens kann man mit Hilfe von K eine Teilklasse aus der Klasse aller partiellen Modelle auswählen,nämlich $\bar{r}(M)$.Wir zeichnen dazu das schon geläufige Zwei-Ebenen-Bild mit der theoretischen und der nicht-theoretischen Ebene.

Fig.59

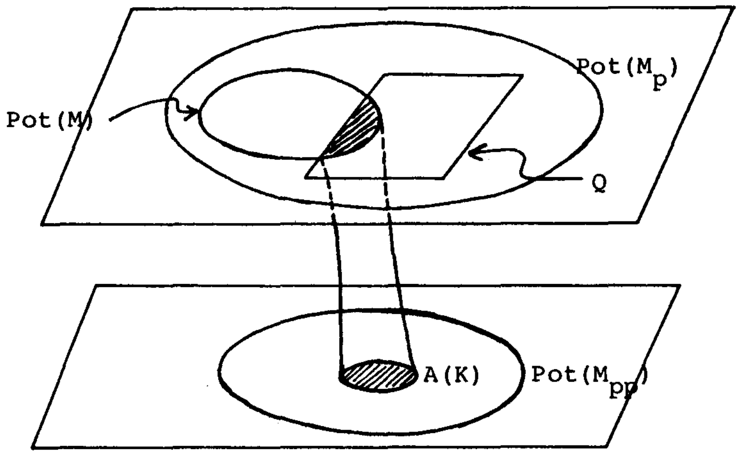


$\bar{r}(M)$ ist im allgemeinen eine echte Teilmenge von M_{pp} und trifft somit eine Auswahl aus M_{pp}.Wir können uns M_p und M_{pp} intuitiv auch vorstellen als die Klassen aller "möglichen Welten",die im theoretischen bzw. nicht-theoretischen Vokabular der Theorie beschreibbar sind.Aus der ersten Klasse schneidet K die Menge aller Modelle heraus,d.h. aller derjenigen möglichen Welten,in denen die Axiome der Theorie gelten.Aus der zweiten Klasse schneidet K die Klasse $\bar{r}(M)$ heraus, also die Klasse aller nicht-theoretisch beschreibbaren Welten, die Redukte von Modellen sind.

Eine dritte Auswahlmöglichkeit eröffnet sich auf der Ebene der Potenzmengen.Wir zeichnen im Zwei-Ebenen-Bild die Potenzmengen von M_p und von M_{pp}. (siehe Figur 60).Auf der theoretischen Ebene ist dann $Pot(M) \subseteq Pot(M_p)$ und ebenso ist $Q \subseteq Pot(M_p)$.Betrachtet man die Redukte von $Pot(M) \cap Q$,so erhält man eine Teilmenge von $Pot(M_{pp})$,die wir mit A(K) bezeichnen. A(K) stellt eine Auswahl aus der Klasse aller möglichen

Kombinationen partieller Modelle dar.

Fig.60



Es werden durch A(K) solche Kombinationen ausgewählt,die Redukte von Modellen sind und zwar Redukte solcher Modelle,die die Querverbindung erfüllen.

INTENDIERTE ANWENDUNGEN UND EMPIRISCHE BEHAUPTUNG

Da ein Kern für eine Theorie allein noch nichts über die Welt aussagt,müssen wir eine Klasse intendierter Anwendungen auszeichnen,auf die sich der Kern beziehen soll.Bei Bestimmung der intendierten Anwendungen geht man aus von realen Systemen, die man in der Welt aufzeigen,vorweisen kann.Um solche realen Systeme mit den Strukturen eines Kerns in Verbindung zu bringen,muß ihnen selbst eine Struktur auferlegt werden.Wie dies genau geschieht,ist weithin unklar und darf wohl als eines der zentralen Probleme der Wissenschaftstheorie bezeichnet werden.Das Problem besteht darin,einen Zusammenhang zwischen konkreten Systemen und "theoretischen" Strukturen herzustellen.Wir nehmen im folgenden an,daß ein solcher Zusammenhang hergestellt werden kann.Ohne diese Annahme hat es keinen Sinn,von empirischer Wissenschaft zu reden.Weiter nehmen wir an,daß nicht nur eine Verbindung hergestellt werden kann,sondern daß diese Verbindung schließlich den intendierten Anwendungen die Struktur partieller Modelle gibt.Mit Hilfe dieser Annahme wird zugegebenermaßen der weiteste Teil des Weges zwischen Realität und theoretischen Strukturen überbrückt.Aber wenn wir hier nicht in etwas gewaltsamer Art eine Brücke schlagen,können wir in der Wissenschaftstheorie derzeit kaum über die Betrachtung bloß formaler Strukturen hinauskommen.Wir können nicht sagen,worin die empirische Behauptung einer Theorie besteht und folglich auch nicht über die Gültigkeit und Testbarkeit von Theorien nachdenken.Alles,was wir ohne diese Brücke tun können,ist,die formale Struktur von Modellen und Querverbindungen zu untersuchen -und solange die strukturalistische Wissenschaftstheorie nur dies tut,kann man ihr vorwerfen (was auch getan wird),sie sei nichts als Logik.

Wir können,wie gesagt,kein genaues Bild davon geben,wie man von realen Systemen zu partiellen Modellen gelangt: wir haben hierüber keine fertige Theorie.Aber einige allgemeinere Andeutungen sind doch möglich und vielleicht auch nützlich.

Erstens steckt in diesem Übergang fast die gesamte Problematik der Erkenntnistheorie.Auf der einen Seite der zu klärenden Verbindung steht ein "unstrukturiertes" System,ein Teil der Welt,den wir auf irgendeine Weise zum Gegenstand unseres Interesses,unserer Neugier gemacht haben.Auf der anderen Seite steht ein von uns mit unseren Begriffen "durchdrungenes" System,d.h.das ursprüngliche System wird nun von uns "durch die Brille unserer Begriffe" gesehen.Während wir z.B. vorher nur ein Karussell sahen,haben wir nach der Herstellung der fraglichen Verbindung ein System von Partikeln vor uns,die sich auf bestimmten Bahnen bewegen.Man kommt hier in natürlicher Weise auf die traditionellen Fragen der Erkenntnistheorie.Ist der von uns benutzte begriffliche Rahmen durch die Realität gar nicht ("Idealismus"),zum Teil ("Konventionalismus") oder gar eindeutig bestimmt? Sind Teile des begrifflichen Rahmens dadurch vorbestimmt ("a priori"),daß wir Menschen,die den Rahmen benutzen,eine ganz bestimmte "Bauart" haben? Gibt es allgemeine Eigenschaften oder Begriffe ("Kategorien"),die in allen Begriffssystemen,die wir möglicherweise erfinden können,nachzuweisen oder enthalten sind?

Die Antwort auf diese Fragen wird nicht von der Wissenschaftstheorie allein gegeben werden können.Ein wichtiger Beitrag wird hier von der Psychologie,speziell der Lern- und Erkenntnispsychologie à la Piaget zu erwarten sein.

Zweitens kann die Wissenschaftstheorie einen eigenen Beitrag leisten und zwar dadurch,daß sie versucht,die partiellen Modelle,um die es geht,selbst wieder als Modelle einer tieferliegenden Theorie zu rekonstruieren und diesen Prozeß nach unten so weit wie möglich fortzusetzen.Es geht also darum,ausgehend von einer Theorie T herauszufinden,welche weiteren Theorien $T_1,..,T_n$ tieferliegend als T sind und von T vorausgesetzt werden.Sodann sind $T_1,...,T_n$ zu rekonstruieren und für jedes $i=1,..,n$ ist der ganze Prozeß zu wiederholen. Wenn man z.B. mit der Mechanik beginnt,kommt man auf diese Weise zur Kinematik,dann von der Kinematik auf die Geometrie und die klassische Zeit-Theorie und von da eventuell auf die Arithmetik,Mengenlehre oder Logik.Mit anderen Worten kann die Wissenschaftstheorie beim Bau der Brücke zwischen Realität und "theoriegeladenen" Strukturen von der Seite der Theorien her "nach unten" arbeiten,während die Lern- und Erkenntnispsychologie von der anderen Seite her "nach oben" kommt.

Drittens möchten wir betonen,daß der strukturalistische Theorienbegriff,den wir hier präsentieren,gerade in dieser Frage eine Vorgehensweise nahelegt,bei der er selbst mit Gewinn benutzt werden kann.Die Vorgehensweise wurde im letzten Absatz geschildert und der Theoriebegriff geht dabei an jeder Stelle ein,wo eine weitere Rekonstruktion "nach unten" vorgenommen wird.Natürlich läßt sich eine analoge Vorgehensweise auch beschreiben,wenn man "intendierte Anwendungen" ersetzt durch "Mengen von Beobachtungs- oder Basissätzen".Aber im letzteren Fall wird eine "reale Basis" von einzelnen,isolierten Tatsachen oder Sachverhalten suggeriert,die der Wirklichkeit nur wenig entspricht.Von der Lernpsychologie her scheint es adäquater,ganze Strukturen als kleinste Einheiten auf der Seite der Realität anzunehmen,denn einzelne Beobachtungstatsachen.

Viertens sieht man aus diesen Bemerkungen,daß die intendierten Anwendungen,wenn man sie als partielle Modelle ansieht,schon ziemlich viel theoretische Struktur enthalten,für die man sich im Fall einer konkreten Theorie nicht interessiert und die man einfach stillschweigend voraussetzt.Eine wissenschaftstheoretische,weitergehende Untersuchung dieser Struktur kann auf zwei Weisen erfolgen.Man kann einmal die Menge I selbst weiter analysieren,indem man für I weitere Unterscheidungen macht oder Axiome aufstellt.Zum anderen kann man versuchen,solche Unterscheidungen durch eine geeignete Theorie zu treffen,die ihrerseits wieder weniger strukturierte intendierte Anwendungen hat.Im Lichte der obigen programmatischen Vorgehensweise zur Klärung des Zusammenhangs zwischen Realität und Theorie würden wir hier stets die zweite Alternative vorziehen.Wir würden mit anderen Worten der Regel folgen "Jede Charakterisierung der intendierten Anwendungen,die sich durch einen formalen theoretischen Apparat untermauern läßt,sollte auch in der Rekonstruktion und im Theorienbegriff auf der formalen Seite erfolgen".Oder anders: "Möglichst wenig Struktur für I"!

Schließlich sei noch bemerkt,daß wir bisher die Wendung "ein potentielles (oder partielles) Modell erfaßt ein reales System" im technischen Sinn und mit Absicht benutzt haben.Der Sinn dieser Redeweise ist es,zu vermeiden,daß die potentiellen Modelle als bloße "Beschreibungen" realer Systeme angesehen werden.Das durch das Wort "Beschreibung" angedeutete Verhältnis zwischen "Original" und "beschriebenem Abbild" scheint uns für ein Verständnis der Beziehung von "Realität" und "Modell" nicht hilfreich,eher irreführend zu sein.

Über die Art der Bestimmung der intendierten Anwendungen wurde schon in Kap.I alles wesentliche gesagt.Die Menge I der intendierten Anwendungen läßt sich nicht durch Axiome festlegen,sondern wird paradigmatisch festgelegt.Man weist durch Aufzeigen einige paradigmatische Anwendungen vor und sagt,daß alle Systeme,die diesen hinreichend ähnlich sind, ebenfalls intendierte Anwendungen sein sollen.

DV-19 Sei $K=\langle M_p, M, M_{pp}, Q\rangle$ ein Kern für eine Theorie.

I paßt zu K gdw $I \subseteq M_{pp}$

Eine solche zu K passende Menge I vertritt in unserem Theoriebegriff die Menge der intendierten Anwendungen.Die Elemente von I stellt man sich am besten vor als reale Systeme,die durch "die Brille" der Theorie betrachtet werden,an denen man also nur die Komponenten sehen will,die durch Grundbegriffe der Theorie erfaßt sind.Wir setzen voraus,daß die intendierten Anwendungen schon die Form partieller Modelle haben.

DV-20 T ist eine empirische Theorie gdw es K und I gibt,sodaß

1) $T=\langle K,I\rangle$
2) K ist ein Kern für eine Theorie
3) I paßt zu K
4) die Strukturen in I erfassen die intendierten Anwendungen für K

Während Bedingung 3) noch rein formaler Natur ist,enthält Bedingung 4) pragmatische Aspekte.Hier ist auch die einzige Stelle,an der der Theoriebegriff vage ist und auch bleiben muß.Denn genau an dieser Stelle geht der Zusammenhang zwischen Realität und "menschlich strukturierter Realität" ein.

Der Auswahloperator A,der jedem Kern K die Menge A(K) aller Kombinationen partieller Modelle zuordnet,die sich bei Beachtung der Querverbindungen zu Modellen ergänzen lassen, wird nun wie folgt definiert.

DV-21 a) Sei K ein Kern für eine Theorie.

$A(K) := \bar{\bar{r}}(\,Pot(M) \cap Q\,)$

b) Sei $T=\langle K,I\rangle$ eine empirische Theorie.

Die empirische Behauptung von T ist der Satz:

$$I \in A(K)$$

Man kann A(K) auch als den empirischen Gehalt von K bezeichnen,denn A(K) enthält alles,was sich im "empirischen",d.h. nicht-theoretischen Vokabular der Theorie erfassen läßt und "unter die Theorie fällt".Diese Verwendung von"empirischem Gehalt" führt jedoch leicht zu Mißverständnissen,weil eine weitverbreitete Auffassung diesem Begriff eine andere Deutung gibt.Danach wäre der empirische Gehalt eines Kerns K gegeben durch Pot(M_{pp}) $\setminus$ A(K),also durch diejenigen "möglichen" Sachverhalte,die nicht unter die Theorie fallen.Die letztere Verwendung des Wortes paßt eher mit dem Gebrauch von "Gehalt" in der Logik zusammen,nach der eine Theorie umso gehaltvoller ist,je "weniger" Modelle sie hat.

Die Formulierung der empirischen Behauptung einer empirischen Theorie gemäß DV-21-b) vermeidet das Problem der theoretischen Terme,indem diese in existenzquantifizierter Form benutzt werden.Eine Analyse der Aussage $I \in A(K)$ ergibt folgende äquivalente Aussage:

Es gibt eine Menge X potentieller Modelle,sodaß
1) $\bar{r}(X)=I$
2) $X \subseteq M$
3) $X \in Q$.

Die empirische Behauptung ist also eine Existenzbehauptung (ein sogenannter "Ramsey-Satz").Es wird die Existenz "passender" theoretischer Ergänzungen behauptet,sodaß,wenn man die intendierten Anwendungen mit diesen theoretischen Termen ergänzt,eine Menge X entsteht,die erstens lauter Modelle enthält und zweitens die Querverbindung erfüllt.

Wir wenden uns nun noch einigen spezielleren Punkten zu,die im Zusammenhang mit empirischen Theorien von Wichtigkeit scheinen.Als wissenschaftstheoretisch von größter Wichtigkeit erweisen sich intertheoretische Relationen,d.h.Relationen zwischen verschiedenen Theorien.Eine erste solche intertheoretische Relation ist die

SPEZIALISIERUNG

Die Spezialisierung einer Theorie entsteht in der Regel durch Hinzufügung neuer spezieller Axiome,deren Gültigkeit nicht für alle intendierten Anwendungen,sondern nur für einen Teilbereich der intendierten Anwendungen behauptet wird.Beispiele wurden in Kap.II behandelt (ÜV-13).Die allgemeine Definition lautet wie folgt.

<u>DV-22</u> Es seien $T=\langle M_p,M,M_{pp},Q,I\rangle$ und $T'=\langle M'_p,M',M'_{pp},Q',I'\rangle$ empirische Theorien.
T' ist <u>eine Spezialisierung von</u> T (in Zeichen: $T'\sigma T$) gdw
1) $M'_p = M_p$,2) $M'_{pp} = M_{pp}$,3) $M' \subseteq M$,4) $Q' \subseteq Q$ und
5) $I' \subseteq I$

Wesentlich ist hier Bedingung 3),durch die zum Ausdruck kommt, daß die Spezialisierung T' eventuell "weniger" Modelle hat als die ursprüngliche Theorie.Das ist zum Beispiel der Fall,wenn die Modelle von T' strengeren Axiomen genügen müssen als die von T.Bedingung 5) ermöglicht es,die spezielleren Axiome von T' nur für einen Teilbereich $I' \subseteq I$ der ursprünglichen intendierten Anwendungen zu behaupten.Wir weisen darauf hin,daß der vorliegende Begriff rein systematisch ist und nicht auf die zeitliche Aufeinanderfolge von Theorien angewandt werden soll.Für eine Betrachtung der "Theoriendynamik" muß man auch die Möglichkeit einer Erweiterung des Bereichs der intendierten Anwendungen ins Auge fassen,was nicht mit der obigen Bedingung 5) zusammenpaßt.Bedingung 4) ist vorgesehen für den Fall,daß die Spezialisierung eventuell auch die Formulierung schärferer Querverbindungen ermöglicht.Man denke etwa an Spezialgesetze der Mechanik,in denen bestimmte Konstanten (wie z.B.die Gravitationskonstante) auftreten.Eine Möglichkeit,die Identitätsquerverbindungen zu verschärfen,besteht dann darin,die numerische Gleichheit dieser Konstanten in verschiedenen Anwendungen zu fordern (ÜV-14).

Wir notieren einige Eigenschaften der Spezialisierungsrelation.

<u>TV-1</u> Es seien T,T',T'' empirische Theorien.Dann gilt:
a) $T\sigma T$
b) Wenn $T\sigma T'$ und $T'\sigma T''$,dann $T\sigma T''$
c) Wenn $T\sigma T'$ und $T'\sigma T$,dann $T=T'$
d) Wenn $T\sigma T'$,dann $A(K) \subseteq A(K')$
e) Wenn $T\sigma T'$ und $I' \in A(K')$,dann $I \in A(K')$

Beweis: (ÜV-15).

THEORETISIERUNG

Eine weitere wichtige intertheoretische Relation, die in Kap. III angesprochen wurde, ist die Theoretisierung. Intuitiv werden dabei zu einer Theorie neue Grundbegriffe hinzugefügt und neue Axiome eingeführt, die die neuen Grundbegriffe mit den schon vorhandenen in Verbindung bringen bzw. untereinander in Beziehung setzen. Die formale Definition lautet wie folgt.

<u>DV-23</u> Seien $T=\langle M_p,M,M_{pp},Q,I\rangle$ und $T'=\langle M'_p,M',M'_{pp},Q',I'\rangle$ empirische Theorien. $x\in M_p$ habe die Form $x=\langle D_1,..,D_k;f_1,..,f_m\rangle$ und $x'\in M'_p$ die Form $x'=\langle D'_1,..,D'_n;f'_1,..,f'_s\rangle$.

T' ist <u>eine Theoretisierung von</u> T (in Zeichen: $T'\mathfrak{T}\,T$) gdw

1) $k\leq n$

2) $m<s$

3) es gibt $\Theta:M'_p\rightarrow M_p$, sodaß

3.1) für alle $x'=\langle D'_1,..,D'_n;f'_1,..,f'_s\rangle\in M'_p$:

$$\Theta(x')=\langle D'_1,..,D'_k;f'_1,..,f'_m\rangle$$

3.2) Θ ist surjektiv

3.3) für alle $x'\in M'$: $\Theta(x')\in M$

4) alle Komponenten f'_i von T' mit $m<i\leq s$ sind T'-theoretisch

5) alle T'-theoretischen Komponenten f'_i mit $1\leq i\leq m$ sind T-theoretisch

Nach Bedingungen 1) und 2) enthalten die potentiellen Modelle der Theoretisierung T' mindestens so viele Grundmengen wie die potentiellen Modelle von T und mehr Relationen ($m<s$) als in T. Es sind also zu den Relationen (Grundbegriffen) von T jedenfalls neue hinzugekommen. Die Funktion Θ in 3) hackt die "neuen" Grundmengen und Relationen in T' ab. Jedes so entstehende "Redukt" muß ein potentielles Modell sein (da Θ nach M_p geht) und alle potentiellen Modelle müssen als solche Redukte auftreten (3.2). Dadurch wird verhindert, daß T' schon in den "alten" Komponenten der potentiellen Modelle andere Grund-

mengen oder Relationen enthalten kann, als in potentiellen Modellen von T vorkommen. 3.3) besagt, daß auch die Modelle von T' auf Modellen von T "aufbauen". Jedes Modell von T' kann man sich vorstellen als gewonnen durch Hinzufügung geeigneter neuer Grundmengen und Relationen zu einer Struktur, die schon ein Modell von T war. Bedingung 4) drückt aus, daß unter den T'-theoretischen Termen jedenfalls alle "neuen" Relationsterme vorkommen, die die neuen Relationen $f'_{m+1},\ldots,f'_s$ bezeichnen (enthalten). Darüberhinaus kann T' noch weitere theoretische Terme enthalten, z.B. die, die schon in T theoretisch sind. Die Unterscheidung zwischen theoretischen und nicht-theoretischen Termen in T' braucht sich also nicht mit der Unterscheidung zwischen "alten" und "neuen" Relationen zu decken. Wir verlangen aber in 5), daß unter den T'-theoretischen Termen keine vorkommen, die in T nicht-theoretisch sind. Es darf also kein nicht-theoretischer Term durch Übergang zu einer "Erweiterung" T' plötzlich in T' theoretisch werden. Diese letzte Bedingung ist ziemlich stark und es könnten Beispiele auftreten, wo sie verletzt ist, etwa beim Übergang von klassischer Mechanik zur allgemeinen Relativitätstheorie, bei dem geometrische Relationen, die in der klassischen Mechanik nicht-theoretisch sind, zu theoretischen Relationen in der allgemeinen Relativitätstheorie werden. Aber die Idee der Theoretisierung ist gerade, daß T' auf T "aufbaut", <u>ohne</u> dadurch T in irgendeiner Weise zu verändern, also auch ohne die Unterscheidung zwischen theoretischen und nicht-theoretischen Termen in Frage zu stellen. Für anders gelagerte Fälle, wie etwa dem gerade erwähnten, würden wir es vorziehen, eine neue Art intertheoretischer Relation einzuführen (ÜV-16).

Auch hier sollen einige Eigenschaften der Theoretisierungsrelation angegeben werden.

<u>TV-2</u> Es seien T, T' und T'' empirische Theorien. Dann gilt:

a) Nicht: $T \mathfrak{J} T$

b) Nicht: ($T \mathfrak{J} T'$ und $T' \mathfrak{J} T$)

c) Wenn $T \mathfrak{J} T'$ und $T' \mathfrak{J} T''$, dann $T \mathfrak{J} T''$

Beweis: (ÜV-17).

(ÜV-18).

REDUKTION

Ein Beispiel für Reduktion wurde in Kap.IV behandelt.Die Reduktion ist eine intertheoretische Relation zwischen Theorien,von denen allgemein behauptet wird,sie seien inkommensurabel.Zwar gibt es in der Physik noch eine Reihe anderer "reduktionsartiger" intertheoretischer Relationen,die auch in der Literatur behandelt werden.Die dabei auftretenden Theorien sind gewöhnlich nicht inkommensurabel,sondern die eine Theorie ist eine "vergröberte Variante" der anderen.Meist sind alle Grundbegriffe -bis auf einen oder zwei- beider Theorien gleich.Und auch die unterschiedlichen Grundbegriffe beziehen sich auf den gleichen Aspekt der Realität.Zum Beispiel beziehen sich die Massenbegriffe aus der klassischen Partikelmechanik und aus der Kontinuumsmechanik beide auf "die Masse";der Unterschied liegt in der räumlichen Ausdehnung der Objekte,denen die Massen zugeschrieben werden.In der Partikelmechanik sind diese Objekte ausdehnungslose Punkte,in der Kontinuumsmechanik sind es Raumgebiete.

Solche Beziehungen zwischen zwei Varianten derselben Theorie sind in der Physik sehr verbreitet,weil sie bei der Anwendung wichtig werden.Um eine komplizierte Theorie anzuwenden oder in ihr Rechnungen durchzuführen,geht man über zu einer "gröberen",einfacheren Variante dieser Theorie,in der sich leichter rechnen läßt.Wenn zwischen beiden Theorien eine "reduktionsartige" formale Beziehung besteht,so lassen sich die in der gröberen Version auf einfachere Weise erhaltenen Resultate in den ursprünglichen Formalismus übertragen.Es scheint uns angebracht,diese Art von intertheoretischen Relationen zu trennen von der hier diskutierten Reduktionsrelation.Das Kriterium,nach dem wir die Trennung vornehmen,ist die Kommensurabilität.Eine intertheoretische Beziehung zwischen inkommensurablen Theorien nennen wir Reduktion,bei formal ähnlichen Beziehungen zwischen kommensurablen Theorien wollen wir nicht von Reduktion reden.Da wir für den zweiten Fall hier keine Beispiele bringen,erübrigt sich die Erfindung eines Namens.Wir geben zu,daß die Unterscheidung von kommensurablen und inkommensurablen Theorien ziemlich vage ist.Aber wenn man die gegenwärtige wissenschaftstheoretische Diskussion verfolgt,findet man klare,allgemein anerkannte Beispiele inkommensurabler Theorien:

Ptolemäische versus Kopernikanische Theorie
Impetustheorie versus Newtonsche Mechanik
klassische Mechanik versus spezielle Relativitätstheorie
phänomenologische Thermodynamik versus statistische Mechanik

Unser Reduktionsbegriff ist nur für solche Theorienpaare intendiert.

Zunächst definieren wir allgemein,wann zwei empirische Theorien in einem formalen Reduktionsverhältnis stehen.Unsere Definition beinhaltet genau die Bedingungen,die im Beispiel von Kap.IV (TIV-5) vorliegen.Es muß eine "globale" Übersetzungsrelation ϱ zwischen den potentiellen Modellen beider Theorien geben,welche zwei Bedingungen genügt.Einmal soll es zu jedem Modell der "reduzierten" Theorie eine Übersetzung in ein Modell der reduzierenden Theorie geben und zum anderen sollen sich die Modelleigenschaften der reduzierten Theorie bei Übersetzung ableiten lassen.

<u>DV-24</u> Seien $T=\langle M_p, M, M_{pp}, Q, I\rangle$ und $T'=\langle M'_p, M', M'_{pp}, Q', I'\rangle$ empirische Theorien.

T ist <u>durch</u> ϱ <u>auf T' formal reduzierbar</u> (in Zeichen: $FR(\varrho, T, T')$) gdw

1) $\varrho \subseteq M_p \times M'_p$
2) zu jedem $x \in M$ gibt es ein $x' \in M'$ mit $x \varrho x'$
3) für alle x, x': wenn $x \varrho x'$ und $x' \in M'$, dann $x \in M$

Eine solch formale Reduktionsrelation kann,wie früher ausgeführt wurde,bereits als Kriterium für Fortschritt dienen,denn wenn gilt $FR(\varrho, T, T')$,aber nicht: $FR(\breve{\varrho}, T', T)$ (mit $\breve{\varrho}$ als der Umkehrrelation von ϱ ,d.h. $\breve{\varrho} = \{\langle x,y\rangle / \langle y,x\rangle \in \varrho\}$),dann ist T' formal reicher als T (bezüglich ϱ).Gilt darüberhinaus "Nicht: $FR(\varrho', T', T)$ für alle möglichen ϱ' ",so entfällt die Relativierung auf eine bestimmte Übersetzung und man kann uneingeschränkt sagen,daß T' besser als T sei.

Trotz dieses formalen Verhältnisses besteht jedoch eine Schwierigkeit,bei empirischen Theorien von Fortschritt zu reden.Denn wie ist gewährleistet,daß beide Theorien sich auf "das Gleiche" beziehen,daß sie beide die "gleichen" intendierten Anwendungen haben? Solange dies nicht gewährleistet ist, könnten beide Theorien ja über völlig verschiedene Anwendungen reden,sodaß die Tatsache,daß die eine Theorie logisch reicher als die andere ist,kein Indiz für Fortschritt darstellt.Zum Beispiel würde es niemanden wundern,wenn sich herausstellte,daß die phänomenologische Thermodynamik mittels eines geeigneten ϱ auf eine ziemlich subtile Version der Ökonomie formal reduzierbar wäre.Denn ökonomische Systeme sind ungleich komplexer als thermodynamische und erfordern eine "reichere" Theorie.Trotzdem wird man hier nicht von Fortschritt reden wollen,denn die beiden Theorien beschäftigen sich ja mit ganz verschiedenen Anwendungen.Von Fortschritt redet man normalerweise nur,wenn eine Theorie <u>in ihrem Anwendungsbereich</u> Konkurrenz durch eine neue,"bessere" Theorie bekommt.

Zur Frage,wie man das festlegen könne,worauf sich eine Theorie bezieht,also die realen,intendierten Anwendungen,haben wir,wie früher schon angedeutet,nicht viel zu sagen.Wir bemerken nur,daß in unserem Begriff der empirischen Theorie dieses Problem sehr implizit auftritt.Es tritt auf,wenn man fragt,auf welche realen Systeme sich die Strukturen in der Menge I der intendierten Anwendungen beziehen.Wir setzen voraus,daß im Fall einer konkreten Theorie diese Frage pragmatisch,ohne Rückgriff auf die formale Struktur der Theorie, geklärt werden kann.

Unter dieser Voraussetzung ergänzen wir den formalen Reduktionsbegriff durch eine Klausel,die sich auf die intendierten Anwendungen bezieht.

<u>DV-25</u> *a) Gilt FR(ϱ,T,T'),so wird* $\hat{\varrho} \subseteq M_{pp} \times M'_{pp}$ definiert durch

$$\langle y,y'\rangle \in \hat{\varrho} \quad \text{gdw} \quad \exists x \in M_p \exists x' \in M'_p (x \varrho x' \wedge r(x)=y \wedge r'(x')=y')$$

b) Sind T und T' empirische Theorien, so heißt T <u>auf</u> T' <u>reduzierbar</u> gdw es ein ϱ gibt, sodaß
1) FR(ϱ, T, T')
2) zu jedem $y \in I$ gibt es ein $y' \in I'$ mit $y \hat{\varrho} y'$

Es wird also gefordert, daß jede intendierte Anwendung y der reduzierten Theorie durch die auf der nicht-theoretischen Ebene induzierte Übersetzungsrelation $\hat{\varrho}$ in eine intendierte Anwendung y' der reduzierenden Theorie übersetzt werden kann. Hierdurch ist zumindest die Möglichkeit gegeben, im konkreten Fall auszudrücken, daß sich beide Theorien auf die "gleichen" Anwendungen beziehen. Wenn es nämlich aufgrund pragmatischer Betrachtungen möglich ist, zu zeigen, daß die zu jeder Anwendung $y \in I$ nach DV-25b-2) existierende Anwendung y' sich auf "das gleiche" reale System bezieht wie y, dann kann man zu Recht sagen, alle Anwendungen von T (nur als reale Systeme verstanden) seien auch solche von T'. Es handelt sich hier jedoch nur um eine Möglichkeit und wir sehen nicht, wie man durch weitergehende Forderungen <u>erzwingen</u> könnte, daß zwei Theorien sich auf die gleichen Anwendungen beziehen.

Auch die Reduktionsrelation hat formal schöne Eigenschaften.

<u>TV-3</u> Seien T, T' und T'' empirische Theorien. Dann gilt:
a) T ist auf T reduzierbar
b) Ist T auf T' und T' auf T'' reduzierbar, so auch T auf T''
c) Ist T auf T' reduzierbar und gilt $I' \in A(K')$, so ist auch $I \in A(K)$

Beweis: (ÜV-19).

THEORIENNETZE

Die drei zuletzt besprochenen intertheoretischen Relationen, nämlich Spezialisierung, Theoretisierung und Reduktion sind zwar Beziehungen zwischen verschiedenen Theorien, aber oft ist es nötig, zum genauen Verständnis <u>einer</u> Theorie die Beziehungen dieser Theorie zu anderen Theorien zu kennen, d.h. die intertheoretischen Relationen, die zu anderen Theorien bestehen. So ist es zum Beispiel für das Verständnis der Mechanik wichtig, die zugrundeliegende Kinematik und Raum-Zeit-Theorie zu kennen, zu der die Mechanik in der Theoretisierungsrelation steht.Zum Verständnis der Tauschwirtschaft muß man die verschiedenen speziellen Nutzenfunktionen kennen,also die in Kap.II angesprochenen Spezialisierungen der grundlegenden Theorie.Und selbst Reduktionsbeziehungen sind oft für das Verständnis der reduzierenden Theorie nötig.Zum Beispiel wird man in der SRT in vielen Fällen die raum-zeitlichen Verhältnisse nach klassischen Vorstellungen vermessen.Mit diesen Meßwerten kann man nur in die relativistische Theorie eingehen,wenn man um eine approximative Reduktionsbeziehung weiß.

Gerade die Spezialisierungsrelation liefert bei umfassenderen ausgereiften Theorien ein ganzes Netz von Spezialisierungen,das von einer gegebenen,grundlegenden Theorie ausgeht.Denn jedes Spezialgesetz gibt in natürlicher Weise dazu Anlaß,eine zugehörige Spezialisierung einzuführen.Man braucht nur dieses Spezialgesetz zu den bereits vorhandenen zentralen Axiomen konjunktiv hinzuzufügen und erhält dadurch eine neue Modellklasse M',die Teilmenge der ursprünglichen Modellklasse M ist.Bei identischen M_p, M_{pp}, Q und eventueller Einschränkung der intendierten Anwendungen erhält man sofort eine Spezialisierung im Sinne von DV-22).

Geht man von einer gegebenen empirischen Theorie aus,die mehrere Spezialgesetze hat,so kann man zu allen Spezialgesetzen Spezialisierungen in der angegebenen Weise konstruieren.Als Resultat erhält man ein Spezialisierungsnetz.

<u>DV-26</u> N ist ein <u>Spezialisierungsnetz</u> gdw es $T_o, T_1, .., T_n$ gibt,sodaß

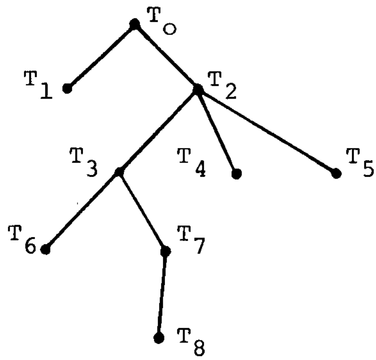
1) $N = \langle T_o, T_1, .., T_n \rangle$

2) für alle $i \in \{o, 1, .., n\}$: T_i ist eine empirische Theorie

3) für alle $i \in \{1, 2, .., n\}$: $T_i \,\sigma\, T_o$

Ein Spezialisierungsnetz ist also einfach eine endliche Folge empirischer Theorien,in der es eine ausgezeichnete Theorie T_o gibt,sodaß alle anderen Theorien der Folge Spezialisierungen von T_o sind.Ein solches Netz läßt sich graphisch darstellen, indem man die Theorien als Knoten und die Spezialisierungsrelation σ zur Erzeugung von Fäden benutzt.In Figur 61) ist ein Beispiel gezeichnet.

Fig.61



Die Knoten des Netzes sind die Theorien und die Fäden deuten an,daß bei je zwei durch einen Faden verbundenen Theorien die weiter unten liegende eine Spezialisierung der oberen ist. Wegen der Transitivität der Spezialisierung (TV-1b) werden die Fäden von auf ihnen liegenden Knoten nicht "unterbrochen". In Figur 61) ist zum Beispiel T_8 eine Spezialisierung von T_o.

Spezialisierungsnetze lassen sich gut zur Darstellung umfassender Theorien,sowie auch zur Darstellung der Entwicklung von Theorien benutzen.Wir haben bisher Theorien an Klassen von Modellen und potentiellen Modellen festgemacht.Der Vorteil dabei ist,daß man Theorien relativ leicht identifizieren kann. Zumindest da,wo bei Einführung einer Theorie eine Menge von Axiomen angegeben wird,ist es nicht schwer,aus diesen Axiomen eine empirische Theorie im früher definierten Sinn zu rekonstruieren.Man könnte sagen,daß dieser Theorienbegriff stark logisch orientiert ist,weil er die Axiome zum Ausgangspunkt der Rekonstruktion macht.

Dagegen wurde in den letzten Jahren in der Wissenschaftsgeschichte,-Psychologie und -Soziologie eine andere Einheit als identifizierbare Grundeinheit der Betrachtung der Wissenschaften und ihrer Entwicklung vorgeschlagen.Es handelt sich um "Paradigmen" oder wissenschaftliche Gemeinschaften (in Englisch: scientific communities).Diese Betrachtungsweise hat sich als fruchtbar erwiesen,sodaß die Frage berechtigt ist, wie sich unsere empirischen Theorien zu dem verhalten,was wissenschaftliche Gemeinschaften "produzieren".Es stellt sich heraus,daß das Produkt,der "Output" wissenschaftlicher Gemeinschaften,das,was publiziert und bei Vorlesungen,Seminaren und Vorträgen geäußert wird,soweit es den Anspruch eines theoretischen Systems hat,entweder empirische Theorien oder allgemeinere Netze von empirischen Theorien sind.In der "Gründungsphase" einer neuen wissenschaftlichen Tradition oder eines neuen Paradigmas wird meist eine empirische Theorie eingeführt.Diese erweist sich aber erst dann als fruchtbar, wenn man sie in vielfältiger Weise spezialisieren und modifizieren kann und die Arbeit an solchen Veränderungen führt zum Aufbau eines immer umfangreicheren und komplizierteren Theoriennetzes,dessen Basis die ursprüngliche Theorie bildet. Es zeigt sich also,daß die mehr logisch orientierte Betrachtungsweise und die historisch-psychologisch-soziologisch orientierte Betrachtungsweise durchaus zu konformen Ergebnissen führen.

Im allgemeinen wird sich die Beschränkung auf die Spezialisierungsrelation allein in den so entstehenden Theoriennetzen als zu streng erweisen.Man wird erwarten dürfen,daß neben der Spezialisierungsrelation noch andere intertheoretische Beziehungen in solche Netze eingehen.Einen allgemeinen Rahmen für die Untersuchung anderer intertheoretischer Relationen bietet der folgende Begriff des Theoriennetzes.

DV-27 $\mathcal{N}$ ist ein Theoriennetz mit Basis T_o gdw es N,Λ und L gibt,sodaß

1) $\mathcal{N} = \langle N, \Lambda \rangle$
2) N ist eine nicht-leere,endliche Menge empirischer Theorien
3) L ist eine endliche,nicht-leere Menge
4) $\Lambda : N \times N \rightarrow Pot(L)$
5) $T_o \in N$
6) für alle T,T',X,λ :wenn $\Lambda(T,T',X)$ und $\lambda \in X$,dann $\lambda \subseteq M_p(T) \times M_p(T')$
7) für alle $T \in N$: wenn $T \neq T_o$,dann gibt es X,sodaß $X \neq \emptyset$ und $\Lambda(T,T_o,X)$

DV-27) ist wie folgt zu interpretieren.Gegeben ist eine endliche Menge von empirischen Theorien $T_o, T_1, .., T_n$,wobei T_o als Basis ausgezeichnet wird.All diese Theorien bilden eine Menge N.Zwischen je zwei Theorien aus N können eine oder mehrere Beziehungen (intertheoretische Relationen) bestehen. Wir interessieren uns hier nur für die "formalen Anteile" dieser Relationen,d.h.die Aspekte,die sich ohne Rückgriff auf intendierte Anwendungen behandeln lassen.L kann man sich vorstellen als die Klasse aller möglichen formalen Beziehungen zwischen Theorien.Unter allen diesen möglichen Beziehungen werden im Netz einige wenige explizit gemacht.Und zwar interessieren wir uns nur für die,die sich durch eine Verbindung zwischen den potentiellen Modellen der beiden Theorien ausdrücken lassen.Es kann sein,daß zwischen zwei Theorien T,T' im Netz mehrere verschiedene Beziehungen bestehen.Jede einzelne davon (λ) läßt sich formal als Relation zwischen den zugehörigen potentiellen Modellen auffassen ($\lambda \subseteq M_p(T) \times M_p(T')$) und alle zusammen bilden eine Menge $X \in Pot(L)$.Dieser Zusammenhang wird durch Λ erfaßt. Λ ordnet je zwei Theorien T,T' aus N die Menge X der zwischen T und T' bestehenden intertheoretischen Relationen $\lambda_1, .., \lambda_m$ zu.Nach DV-27-6) ist jedes $\lambda_i \in X$ (mit $\Lambda(T,T', X)$) eine Relation zwischen den potentiellen Modellen von T und T': $\lambda_i \subseteq M_p(T) \times M_p(T')$.Bedingung 7) schließlich betrifft den "Zusammenhang" des Netzes. Alle Theorien T des Netzes sollen mit T_o in mindestens einer intertheoretischen Beziehung stehen.Netze mit dieser Eigenschaft sind "zusammenhängend" (vergleiche [Balzer & Sneed, 1977/78]).Ein Theoriennetz ist also grob gesprochen eine endliche Menge von Theorien zusammen mit einer Spezifikation von zwischen diesen Theorien bestehenden intertheoretischen Relationen.

Es ist klar,daß alle bisher behandelten intertheoretischen Relationen in ihrem formalen Teil als solche λ's behandelt werden können,die in DV-27) in den Mengen X mit $\Lambda(T,T',X)$ vorkommen.Daran sieht man schon,wie allgemein unser Begriff des Theoriennetzes ist.Man kann für ein Theoriennetz mit Basis T_o in naheliegender Weise eine empirische Behauptung formulieren (ÜV-20).Wir wollen jedoch hier auf Theoriennetze nicht weiter eingehen,einmal,weil sie zur Zeit noch Gegenstand der Forschung sind und speziell erst einmal Beispiele untersucht werden sollten;zum anderen,um dem Leser Gelegenheit zu eigener kreativer Betätigung zu geben.

Theoriennetze und auch Spezialisierungsnetze eignen sich auch gut zur Darstellung der zeitlichen Entwicklung des Outputs wissenschaftlicher Gemeinschaften ("Theoriendynamik"). Man betrachtet einfach eine zeitliche Folge von Theoriennetzen,bei denen das ausgezeichnete Element (genauer: der Kern desselben) stets identisch bleibt,die sich aber im Laufe der Zeit verkleinern und vergrößern können.Das heißt,es können bei fortschreitender Zeit Spezialisierungen wegfallen oder neue Spezialisierungen zu den schon vorhandenen hinzukommen.Es macht keine Mühe,den entsprechenden Begriff der "Theorienentwicklung" als Folge von Netzen zu definieren (ÜV-21).An diesem Modell der Theorienentwicklung lassen sich auch einige Varianten der fortschrittlichen Entwicklung unterscheiden und diskutieren (ÜV-22).

INVARIANTE THEORIEN

Bei der Diskussion der theoretischen Invarianz in Kap.III wurde schon angedeutet,daß die "theoretischen Ergänzungen" eines partiellen Modells in natürlicher Weise eine Klasseneinteilung auf den potentiellen Modellen liefern.Man hat also eine Äquivalenzrelation zwischen potentiellen Modellen: zwei potentielle Modelle sind äquivalent,wenn sie das gleiche Redukt haben.Ebenfalls in Kap.III wurde schon angedeutet,daß man in der Mathematik bei Vorliegen einer Äquivalenzrelation oft die Äquivalenzklassen als neue Objekte behandelt und auf diese Weise eine "invariante" neue Theorie über diese Objekte machen kann.

Wir wollen hier kurz den "schönsten" möglichen Fall betrachten,der bei empirischen Theorien in dieser Hinsicht auftreten kann.Es sei eine empirische Theorie $T=\langle M_p,M,M_{pp},Q,I\rangle$ und eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf M_p gegeben.Wenn $\sim$ die

Äquivalenzrelation sein soll, die durch "theoretische Ergänzung" erzeugt wird, die also theoretische Ergänzungen mit gleichem Redukt äquivalent setzt, so muß gelten:

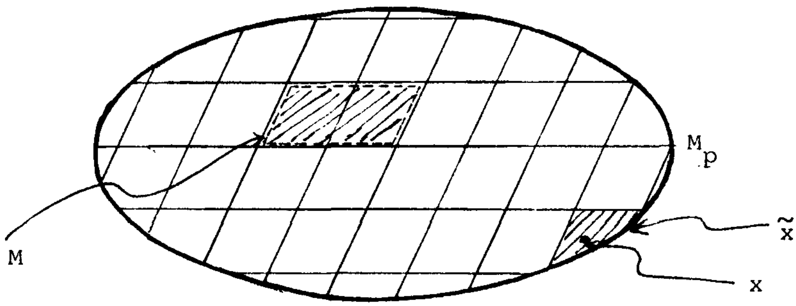
$$\text{für alle } x \in M_p: \tilde{x} = E(x)$$

wobei $\tilde{x}$ die Äquivalenzklasse von x unter $\sim$, also $\tilde{x} := \{y/y \sim x\}$ ist und E(x) wie in DV-15) definiert. Der schönste denkbare Fall liegt nun vor, wenn die Modelle der Theorie mit dieser Äquivalenzrelation verträglich sind. Das heißt, wenn folgendes gilt:

$$\text{für alle } x,y\text{: wenn } x \sim y \text{ und } x \in M, \text{dann } y \in M.$$

Diese Bedingung besagt anschaulich, daß die Klasse der Modelle säuberlich in Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ zerfällt. Mit anderen Worten: $\sim$ ist auch eine Klasseneinteilung auf M (ÜV-23).

Fig.62



Unter diesen Bedingungen liegt es in der Tat nahe, die Äquivalenzklassen unter $\sim$ als neue Objekte zu behandeln. Denn für jede Äquivalenzklasse erfüllen entweder alle ihre Elemente die Axiome (sind Modelle) oder dies gilt für kein Element. Jedenfalls kann man, wenn man eine neue Theorie über solche Äquivalenzklassen macht, durch diese Theorie keine Bedingung ausdrücken, die zwischen verschiedenen Elementen derselben Äquivalenzklasse unterscheiden würde.

Zur weiteren Diskussion führen wir einige technische Abkürzungen ein.

DV-28 Es sei $T=\langle M_p, M, M_{pp}, Q, I\rangle$ eine empirische Theorie und $\sim \in ÄR(M_p)$.

a) für $x \in M_p$ sei $\tilde{x} := \{y / y \in M_p \wedge y \sim x\}$

b) $M_{p/\sim} := \{\tilde{x} / x \in M_p\}$

c) $M_{/\sim} := \{\tilde{x} / x \in M\}$

d) $Q_{/\sim} := \{X / \exists Y \in Q (X = \{\tilde{y} / y \in Y\})\}$

$M_{p/\sim}$ wird gelesen als "M_p modulo $\sim$ ".Es handelt sich um die Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ .Für die Querverbindung Q kann man die Äquivalenzklassenbildung einfach "liften".Die Elemente von $Q_{/\sim}$ sind Kombinationen X von Äquivalenzklassen,sodaß irgendwelche Repräsentanten dieser Äquivalenzklassen eine zulässige Kombination Y aus Q bilden.

Man könnte nun versuchen,"invariante Version" von T unter $\sim$ wie folgt zu definieren.

DV-29 Es sei $T=\langle M_p, M, M_{pp}, Q, I\rangle$ eine empirische Theorie und für $x, y \in M_p$ gelte $x \sim y$ gdw $r(x)=r(y)$.
T' ist die invariante Version von T unter $\sim$ gdw es $M'_p, M', M'_{pp}, Q', I'$ gibt,sodaß

1) $T'=\langle M'_p, M', M'_{pp}, Q', I'\rangle$,2) $M'_p = M_{p/\sim}$,3) $M' = M_{/\sim}$

4) $M'_{pp} = M_{pp}$,5) $Q' = Q_{/\sim}$,6) $I' = I$

Man hat also auf der theoretischen Ebene und bei den Querverbindungen Äquivalenzklassen gebildet.Das Resultat ist aber keine empirische Theorie mehr.Weder sind die Elemente von M'_p und M' echte Strukturen,noch entstehen aus Elementen von M'_p durch Weglassen theoretischer Terme Elemente von M'_{pp}.Man könnte allerdings die Beziehung zwischen M'_p und M'_{pp} so,wie sie in DV-29) besteht,als einen anderen Theoriebegriff konstituierend,nämlich den der invarianten empirischen Theorie, auffassen.Jedenfalls ist die Beziehung sehr einfach.Die Elemente von M'_{pp} sind Redukte von Elementen der Elemente von M'_p.Dabei ist es gleichgültig,welche Repräsentanten man aus einem Element von M'_p zur Reduktbildung heranzieht.Im Hinblick auf die Verhältnisse in der klassischen Mechanik,wie sie in

Kap.III diskutiert wurden, muß man sagen, daß der Begriff der invarianten Version bei der Mechanik nicht relevant zu sein scheint. Zwar sehen Physiker die in Kap.III besprochenen Invarianzen als wesentlich für die Mechanik an, aber es wurden wenig Anstalten gemacht, invariante Versionen zu entwickeln. Anders ist die Situation in der derzeit "modernsten" Theorie: der allgemeinen Relativitätstheorie. Hier wurden von Anfang an invariante Formulierungen gesucht und benutzt.

ABSCHLIEßENDE BEMERKUNGEN

Wir haben in diesem Kapitel eine Reihe von Begriffen durch Definition eingeführt. Eine Definition liefert notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß Entitäten unter den definierten Begriff fallen. Insbesondere fällt also jede Entität unter den definierten Begriff, die alle in der Definition aufgeschriebenen Bedingungen erfüllt. Betrachten wir die Situation am Beispiel des Begriffs der empirischen Theorie. Bezeichnet "a" irgendetwas (z.B. sich selbst), so definieren wir $M_p := \{\langle\{a\},\{\langle a,a\rangle\}\rangle\}$, $M := M_p$, $M_{pp} := \{\{a\}\}$, $Q := \{M_p\}$ und $I := M_{pp}$. Dann erfüllt das Tupel $T := \langle M_p, M, M_{pp}, Q, I\rangle$ (fast!) alle Bedingungen von DV-20). Aber T ist doch keine empirische Theorie.

Aus diesem Dilemma gibt es zwei Auswege. Erstens kann man davon abgehen, die Definitionen in diesem Kapitel als Definitionen anzusehen. Man ersetzt den Junktor "gdw" in jeder Definition durch "nur wenn". Unsere Definitionen werden dadurch zu bloß notwendigen Bedingungen. Am Beispiel des Begriffs der empirischen Theorie haben wir dann folgende Lage. Die Bedingungen an T müssen von jeder Entität, die eine empirische Theorie ist, erfüllt sein, aber nicht umgekehrt. Es kann Entitäten geben, die alle Bedingungen erfüllen und trotzdem keine empirischen Theorien sind. Das obige Monster ist ein Beispiel hierfür. Die Strategie hinter dieser Aufweichung ist naheliegend. Die Gegenbeispiele zeigen, daß die vermeintlichen Definitionen viel zu weit, zu schwach sind, um das, was sie definieren sollen (z.B. empirische Theorien) auch hinreichend zu charakterisieren.. Man hofft, in Fällen <u>konkreter</u> Theorien (wie bei den Beispielen der Kapitel I-IV) Bedingungen zu finden, die sich jeweils als hinreichend erweisen.Für die Wissenschaftstheorie auf allgemeiner Ebene dagegen hat man wenig Hoffnung,hinreichende Bedingungen zur Charakterisierung empirischer Theorien zu finden.Denn empirische Theorien sind zu unterschiedlich.Man kann nicht hoffen,Bedingungen zu finden,die die ungeheure Vielfalt von Erscheinungsformen hinreichend charakterisieren.Dieser Ausweg hat allerdings den Nachteil,daß man nicht mehr mit Definitionen arbeiten kann. Die Errungenschaften der Logik können dann nur noch in beschränktem Maß angewandt werden.

Als angenehmer erweist sich deshalb der zweite Ausweg,der auch im Lichte unserer Untersuchungen konkreter Fallbeispiele durch Analogie zu rechtfertigen ist.Wir können nämlich ein analoges Dilemma auf der Ebene einer konkreten Theorie konstruieren.Dort werden die Komponenten des formalen Kerns durch Definition eingeführt.Wir könnten auch dort formale Monster konstruieren,die zwar Modelle sind,aber nichts mit der betrachteten Theorie zu tun haben.Das Dilemma ist dann das gleiche: man weist ein Monster vor und fragt,wieso es ein Modell der Theorie sei.Der Ausweg auf der Ebene konkreter Theorien bestand darin eine Menge intendierter Anwendungen einzuführen,die zwar auch wieder als Strukturen gegeben sind,die man sich aber als die realen intendierten Anwendungen erfassend vorstellt.Warum soll auf der Meta-Ebene nicht das gleiche Vorgehen zulässig sein.Behalten wir unsere Definitionen bei (die uns Analoga zur Klasse der Modelle in einer konkreten Theorie liefern) und führen wir das,wofür diese Definitionen intendiert sind (eben z.B.die empirischen Theorien) paradigmatisch als intendierte Anwendungen für unsere Meta-Theorie ein.

ÜBUNGEN ZU KAPITEL V

(ÜV-1): Die Sprache der Megenlehre benutzt folgende Symbole: abzählbar unendlich viele Variable $x_1, x_2, \ldots$,sowie { , } ,(,), $=, \in, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \Leftrightarrow, \exists, \forall$.Terme und Formeln werden simultan induktiv wie folgt definiert: 1) Jede Variable x_i ist ein

Term, 2) Sind t,t' Terme,so sind $(t=t')$ und $(t \in t')$ Formeln, 3) Sind A und B Formeln,so auch $\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$, 4) Ist A eine Formel,so auch $\exists x_i A$ und $\forall x_i A$,5) Ist A eine Formel,so ist $\{x_i/A\}$ ein Term.Für Terme t,t' wird $<t,t'>$ definiert durch $\{\{t\},\{t,t'\}\}$ und $t \times t'$ durch $\{x_i/ \exists x_j \exists x_k((x_i=<x_j,x_k>) \wedge (x_j \in t) \wedge (x_k \in t'))\}$.

(1) Bilde eine Formel,die die Zeichenfolge ")}))}))" enthält und eine Formel,die die Zeichenfolge "$\forall x_i \exists x_j \forall x_k$" enthält.

(2) Formalisiere die Aussage "Alle Menschen sind sterblich" in der oben definierten Sprache.(Benutze eine Variable als Zeichen für die Menge der Menschen und eine Variable als Zeichen für die Menge der sterblichen Wesen.)

(3) Formalisiere die Aussage "Je zwei verschiedene Teilchen haben verschiedene Masse".(Benutze Variablen als Zeichen für die Menge aller Teilchen,die Menge der reellen Zahlen und die Massenfunktion m.Fasse m als Menge von geordneten Paaren $<p,\alpha>$ auf,wobei p ein Teilchen und α eine reelle Zahl ist.)

(ÜV-2): Das vielleicht wichtigste Axiom der Mengenlehre ist das Extensionalitätsaxiom: $(x_i=x_j \leftrightarrow \forall x_k((x_k \in x_i) \leftrightarrow (x_k \in x_j)))$. Hieraus folgt in den üblichen Systemen der Mengenlehre jeder Satz der Form

$$((A(x_i) \wedge \forall x_k((x_k \in x_i) \leftrightarrow (x_k \in x_j)))) \rightarrow A(x_j))$$

und speziell:

(*) $(((x_i \in x_l) \wedge \forall x_k(((x_k \in x_i) \leftrightarrow (x_k \in x_j)))) \rightarrow (x_j \in x_l))$.

Wir interpretieren die Variablen wie folgt: x_i sei die Menge der Uranatome, x_j die Menge der Atome mit Atomgewicht 235 und x_l die Menge der Mengen,von denen Hans glaubt,sie seien nicht leer.Ist der Satz (*) bei dieser Interpretation notwendigerweise richtig?

(ÜV-3): Zeige,daß die Ortsfunktion s der klassischen Mechanik eine Relation über P,T, $\mathbb{R}$ und die $\prec$-Relation der SRZ eine Relation über E ist.

(ÜV-4): Modifiziere die potentiellen Modelle der Freudschen Theorie so,daß sie Strukturen werden.(Verwandle B,N,U in Relationen und formuliere Bedingung 5) entsprechend um.)

(ÜV-5): Sind die Strukturen $\langle T;\leq\rangle$ mit T und $\leq$ wie in Kap.I und $\langle E;\prec\rangle$ mit E und $\prec$ wie in Kap.IV vom gleichen Typ? Sind $\langle R;\underline{zw}\rangle$ und $\langle R;\equiv\rangle$ von gleichem Typ?

(ÜV-6): Zeige: Alle potentiellen Modelle der Freudschen Theorie in der Form von ÜV-4 sind von gleichem Typ.

(ÜV-7): Zeige: Nicht alle potentiellen Modelle der Tauschwirtschaft sind von gleichem Typ.Modifiziere die Definition der potentiellen Modelle der Tauschwirtschaft so,daß die Klasse der potentiellen Modelle der Tauschwirtschaft eine Klasse potentieller Modelle für eine Theorie wird.(Halte die Zahl der Güterarten fest.)

(ÜV-8): Es seien T,T' Theorien,deren Modelle die Form $x=\langle D_1,D_2;f_1,f_2\rangle$ bzw. $x'=\langle D,D';f\rangle$ haben.Einziges Axiom sei für T: $f_1\subseteq D_1\wedge f_2\subseteq D_2\wedge\forall x\forall y(x\in f_1\wedge y\in f_2\rightarrow x=y)$ und einziges Axiom für T' sei: $f\subseteq D\times D'\wedge\exists x\in D\forall y\forall z(\langle y,z\rangle\in f\rightarrow y=z\wedge y=x)$.
Zeige: Zu jedem Modell von T gibt es ein isomorphes Modell von T' und umgekehrt.Daß zwei Modelle isomorph sind,heißt dabei, daß es zwischen x und x' ein bijektives $\varphi:D_1^x\times D_2^x\rightarrow D_{x'}\times D'_{x'}$ gibt,sodaß für alle $\langle a,b\rangle\in D_1^x\times D_2^x$: $\langle a,b\rangle\in f_1\times f_2\Leftrightarrow\varphi(\langle a,b\rangle)\in f$. (Beide Theorien sind also in diesem Sinn äquivalent.)

(ÜV-9): Sei $A(R,Z;\lessdot,d)$ die Formel,die aus der Konjunktion aller Formeln in DIII-5) mit der Formel $\forall a\forall b(a\in R\wedge b\in R\rightarrow d(a,b)=5)$. Zeige: A bestimmt die 2-te Relation in der Klasse der potentiellen Modelle der klassischen Raum-Zeit-Theorie eindeutig.

(ÜV-10): Sei T eine empirische Theorie,deren potentielle Modelle die Form $x=\langle D_1,..,D_k;f_1,..,f_m\rangle$ haben.Für $1\leq i\leq m$ sei der

<u>Term</u> $\bar{t}_i$ von T definiert als $\bar{t}_i := \{f_i / \langle D_1,..,D_k; f_1,..,f_{i-1}, f_i, f_{i+1},..,f_m\rangle \in M_p\}$.In Abänderung des Textes definieren wir (einem Vorschlag von Mühlhölzer folgend): X ist eine <u>Meßmethode für</u> $\bar{t}_i$ gdw es ein A gibt,sodaß DV-10-1) und DV-10-2) gelten und X=S(A).x ist ein <u>Meßmodell für</u> $\bar{t}_i$ (in Zeichen: $x \in MM_i$) gdw es eine Meßmethode X für $\bar{t}_i$ gibt,sodaß $x \in X$ und $x \in I^*$.Wir nehmen an,daß $I^* \subseteq M_p$.Weiter definieren wir: $\bar{t}_i$ ist <u>T-theoretisch</u> (in Zeichen: $TH(T,\bar{t}_i)$) gdw $\forall x(x \in MM_i \rightarrow x \in M)$.Wir benutzen "ÜP($x \in M$)" als Abkürzung für "es ist überprüft,daß $x \in M$".(Man kann dies auch lesen als "es ist bestätigt oder widerlegt,daß $x \in M$").Für ÜP gelte folgendes Axiom:

(A) $\forall x \in I^*(\text{ÜP}(x \in M) \rightarrow \exists i \leq m \forall y \in MM_i \exists a(a \in (\bar{t}_i)_x \cap (\bar{t}_i)_y))$.

Interpretiere (A).Zeige: $\forall x(x \in I^* \wedge \text{ÜP}(x \in M) \wedge \exists i \leq m(TH(T,\bar{t}_i) \rightarrow \exists y(y \in I^* \wedge y \in M))$.Konstruiere hiermit einen Zirkel oder Regreß bezüglich ÜP,ausgehend von ÜP($x \in M$) mit $x \in I^*$.

(ÜV-11): Sei $T = \langle M_p, M, M_{pp}, Q, I\rangle$ eine empirische Theorie.Definiere $T' := \langle M_p, M', M_{pp}, Q', I\rangle$ mit $Q' := Q \setminus \{\{x\} / x \in M_p \setminus M\}$ und $M' := M_p$. Zeige: T' erfüllt alle Bedingungen einer empirischen Theorie mit Ausnahme von DV-17-4).Zeige: Für alle $X \subseteq M_{pp}$: $\exists Y(\bar{r}(Y) = X \wedge Y \subseteq M \wedge Y \in Q) \Leftrightarrow \exists Y(\bar{r}(Y) = X \wedge Y \in Q' \wedge \forall y \in Y(\{y\} \in Q'))$.

(ÜV-12): Es sei M_p die Klasse aller potentiellen Modelle der klassischen Mechanik und $\bar{P} := \bigcup_{x \in M_p} P_x$.Es sei eine Funktion $\circ : \bar{P} \times \bar{P} \rightarrow \bar{P}$ gegeben und "$p \circ p' = p_1$"bedeute "p_1 ist das Resultat einer Zusammenfügung ("Konkatenation") von p' mit p".Wir definieren $Q \subseteq Pot(M_p)$ durch $X \in Q$ gdw $\emptyset \neq X \subseteq M_p$ und $\forall x \in X \forall p,p' \in P_x \exists y \in X(p \circ p' \in P_y \wedge m_x(p) + m_x(p') = m_y(p \circ p'))$. Q heißt <u>Extensivitätsconstraint</u> für m.Welche Bedingungen von DV-17) sind für Q nicht erfüllt?

(ÜV-13): Sei M' die Menge aller Modelle von ÖKO,in denen die Nutzenfunktion eine Stone-Geary-Funktion ist.Definiere passende Klassen M_p', M_{pp}', Q' und I',sodaß $T' := \langle M_p', M', M_{pp}', Q', I'\rangle$ eine empirische Theorie wird.Zeige: $T' \sigma$ ÖKO.

(ÜV-14): Sei M' die Klasse aller Modelle der klassischen Mechanik, in denen zusätzlich gilt: $\forall p \in P \exists k \in \mathbb{R}^+ \exists \mathfrak{r}_p \in \mathbb{R}^3$ $\forall t \in T(f(p,t,1)=-k\cdot(s(p,t)-\mathfrak{r}_p))$ ("Hooke'sches Gesetz" für die erste Kraftkomponente f_1). Formuliere die Querverbindung Q' für M', sodaß in allen $x,x' \in X \in Q'$ die "Federkonstante" k gleich ist. (Formuliere zuerst Q^* für eine Klasse von Strukturen der Form $\langle R,Z,P; <,d,i,s,m,f,k\rangle$ mit $k \in \mathbb{R}^+$.)

(ÜV-15): Beweise TV-1).

(ÜV-16): Zeige: SR-KIN ist eine Theoretisierung von SRZ, wenn man i als einzige SR-KIN-theoretische Relation auffaßt.

(ÜV-17): Beweise TV-2).

(ÜV-18): Es gelte $T' \mathfrak{T} T$.
(1) Definiere eine Funktion Θ^*, die jedem $x' \in M'_{pp}$ dessen "Redukt" $\Theta^*(x) \in M_{pp}$ zuordnet und zeige, daß Θ^* sujektiv ist.
(2) T,T' mögen folgende zusätzliche Bedingungen erfüllen:
a) $\forall x \in I \exists x' \in I' (\Theta^*(x')=x)$
b) $\forall X' \in Q'(\overline{\Theta}^*(X') \in Q)$, wobei $\overline{\Theta}^*$ geeignet zu definieren ist.
Zeige: Wenn $I' \in A(K')$, dann $I \in A(K)$.

(ÜV-19): Beweise TV-3).

(ÜV-20): (1) Für eine empirische Theorie $T=\langle M_p,M,M_{pp},Q,I\rangle$ definiere: "die Klasse er(I) aller erfolgreichen Ergänzungen von I". (Jedes Element von er(I) soll bei Reduktbildung I ergeben und die Axiome und Querverbindungen erfüllen.)
(2) Seien M_p, M'_p Klassen potentieller Modelle für Theorien. Für $\lambda \subseteq M_p \times M'_p$ definiere $\overline{\lambda} \subseteq Pot(M_p) \times Pot(M'_p)$ in natürlicher Weise.
(3) Definiere in der Situation von (1) und (2) "das Bild von er(I) unter $\overline{\lambda}$ in $Pot(M'_p)$".
(4) Definiere für ein Theoriennetz $\mathcal{N}=\langle N,\Lambda\rangle$ mit Basis T_o und $N=\langle T_o,T_1,..,T_n\rangle$ den <u>Gehalt</u> $GH(T_o/T_1,..,T_n)$ <u>von</u> T_o <u>relativ zu</u> $T_1,..,T_n$ als Durchschnitt von $er(I_o)$ mit allen "Bildern von

er(I_i) unter $\overline{\lambda}_i^{\,j}$ in Pot(M_p)",wobei i von 1 bis n und j so läuft,daß die Menge X_i,für die gilt $\Lambda(T_i,T_o,X_i)$ genau aus allen λ_i^j besteht ($X_i = \{\lambda_i^1,\ldots,\lambda_i^{m_i}\}$).

(5) Stelle die Definition zeichnerisch für $N=\langle T_o,T_1,T_2\rangle$ im üblichen Zwei-Ebenen-Diagramm dar und überprüfe die Definition aus (2) auf eventuelle Mängel.

(ÜV-21): Für ein Spezialisierungsnetz $N=\langle T_o,\ldots,T_n\rangle$ sei $\Delta(N):=n$ und für $0\leq i\leq\Delta(N)$ sei $K_i(N)=\pi_1(T_i)$ und $I_i(N)=\pi_2(T_i)$ (wobei für $T_i=\langle K_i,I_i\rangle$: $\pi_1(T_i)=K_i$ und $\pi_2(T_i)=I_i$).Wir definieren: $\underline{E}$ ist eine <u>Theorienentwicklung</u> gdw $E=\langle\mathcal{N},\leq\rangle$ und
1) $\mathcal{N}$ ist eine endliche Menge von Spezialisierungsnetzen,
2) $\leq$ ist eine Ordnung auf $\mathcal{N}$ ($N\leq N'$ bedeutet,daß N' zeitlich nach N kommt oder mit N gleichzeitig existiert.) ,3) $\forall N,N'\in\mathcal{N}$ $(K_o(N)=K_o(N'))$.
Zeige:(Es gibt I^* sodaß $\forall N\in\mathcal{N}\ (\langle K_o(N),I^*\rangle\ \sigma\ \langle K_o(N),I_o(N)\rangle)$) gdw $\bigcap\limits_{N\in\mathcal{N}} I_o(N)\neq\emptyset$.

(ÜV-22): Sei $\underline{E}=\langle\mathcal{N},\leq\rangle$ eine Theorienentwicklung,$\underline{D}:=\{I_i(N)/N\in\mathcal{N}$ und $0\leq i\leq\Delta(N)\}\cup\{\emptyset\}$ und $\vartheta:\mathcal{N}\times\mathbb{N}\to\underline{D}$ eine Funktion mit:

$$\vartheta(N,i)\begin{cases}\subseteq I_i(N) & \text{,falls } 0\leq i\leq\Delta(N)\\ =\emptyset & \text{sonst.}\end{cases}$$

(Für $i\leq\Delta(N)$ heißt $\vartheta(N,i)$ die "Menge der getesteten Anwendungen von T_i").
(1) Definiere: N' folgt in $\underline{E}$ unmittelbar auf N.
(2) N' folge in $\underline{E}$ unmittelbar auf N.Definiere: "N' stellt einen theoretischen Fortschritt gegenüber N dar".(N' soll aus N durch Hinzunahme eines $T_i=\langle K_i,I_i\rangle$ entstehen,sodaß für ein $T_j=\langle K_j,I_j\rangle\in N$ gilt: $\vartheta(N,j)=\vartheta(N',i)$ und $T_i\ \sigma\ T_j$.)
(3) Definiere: "N' stellt einen nicht-theoretischen Fortschritt gegenüber N dar".(Vertausche die Rollen von σ und ϑ in (2)).
(4) Definiere: "N' stellt einen Fortschritt gegenüber N dar". (Benutze (2) und (3)).

(ÜV-23): Beweise: Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M_p und $\sim$ mit M verträglich, so ist $\sim$ auch eine Äquivalenzrelation auf M.

Literatur

[Balzer,1976],Balzer,W.,"Holismus und Theorienbeladenheit der Beobachtungssprache (Ein Beispiel)",Erkenntnis 10

[Balzer & Sneed,1977/78],Balzer,W.und Sneed,J.D.,"Generalized Net Structures of Empirical Theories",Studia Logica 36 und 37

[Balzer,1978],Balzer,W.,Empirische Geometrie und Raum-Zeit-Theorie in mengentheoretischer Darstellung,Kronberg/Taunus

[Balzer,1978a],Balzer,W.,"Die epistemologische Rolle des zweiten Newtonschen Axioms",Philosophia Naturalis 17

[Balzer,1978b],Balzer,W.,"Incommensurability and Reduction", Acta Philosophica Fennica Vol 30,Nos.2-4

[Balzer & Kamlah,1979],Balzer,W.und Kamlah,A.(Hrsg.),Aspekte der physikalischen Begriffsbildung,Braunschweig-Wiesbaden

[Balzer & Kamlah,1980],Balzer,W.und Kamlah,A.,"Geometry by Ropes and Rods",Erkenntnis 15

[Balzer,1980],Balzer,W.,"Günther Ludwigs Grundstrukturen einer physikalischen Theorie",Erkenntnis 15

[Balzer & Moulines,1980],Balzer,W.und Moulines,C.U.,"On Theoreticity",Synthese 44

[Balzer,1981],Balzer,W.,"Mathematical Structures as Representations of Intellectual Structures",Dialectica 34

[Balzer,1981a],Balzer,W.,"Über Quines Beobachtungssätze", Kant-Studien 72

[Balzer,1981b],Balzer,W.,"Zum Apriori von Raum und Zeit in der heutigen Physik",Akten des 5.Internationalen Kant-Kongresses, S.1063 ff.,Bonn

[Balzer & Moulines,1981],Balzer,W.und Moulines,C.U.,"Die Grundstruktur der klassischen Partikelmechanik und ihre Spezialisierungen",Zeitschrift für Naturforschung 36a

[Balzer,1982],Balzer,W.,"A Logical Reconstruction of Pure Exchange Economics",Erkenntnis 17

[Balzer,1982a],Balzer,W.,"The Origin and Role of Invariance in Classical Kinematics",Beitrag zum Kolloquium "Raum-Zeit-Mechanik",München 1979,erscheint in den Proceedings

[Balzer & Heidelberger,1982],Balzer,W.und Heidelberger,M.,

(Hrsg.),Die Logik empirischer Theorien,Berlin,erscheint voraussichtlich 1982
[Balzer & Mühlhölzer,1982],Balzer,W.und Mühlhölzer,F.,"Klassische Stoßmechanik",erscheint in: Zeitschrift für allgemeine Wissenschaftstheorie
[Bogdan,1979],Bogdan,R.J.(Hrsg.),Patrick Suppes,Dordrecht
[Bourbaki,1968],Bourbaki,N.,Theory of Sets,Paris
[Butts & Hintikka,1977],Butts,R.E.und Hintikka,J.(Hrsg.), Basic Problems in Methodology and Linguistics,Dordrecht/Boston und Historical and Philosophical Dimensions of Logic, Methodology and Philosophy of Science,Dordrecht/Boston
[Debreu,1976],Debreu,G.,Werttheorie,Berlin-Heidelberg-New York
[Diederich,1977],Diederich,W.,"Zu Sneeds Theorie der mathematischen Physik: Theorienhierarchien und ihre Entwicklung", in: Logik,Ethik,Theorie der Geisteswissenschaften,G.Patzig et al.(Hrsg.),Hamburg
[Diederich,1981],Diederich,W.,Strukturalistische Rekonstruktionen,Braunschweig-Wiesbaden
[Dorling,1977],Dorling,J.,"The Eliminability of Masses and Forces in Newtonian Particle Mechanics: Suppes Reconsidered", British Journal for the Philosophy of Science 28
[Einstein,1905],Einstein,A.,"Zur Elektrodynamik bewegter Körper",Annalen der Physik 17
[Erwe,1968],Erwe,F.,Differential- und Integralrechnung I, Mannheim/Zürich
[Feyerabend,1962],Feyerabend,P.,"Explanation,Reduction,and Empiricism",in: Minnesota Studies in the Philosophy of Science Vol.3,M.Radner und S.Winokur (Hrsg.),Minneapolis
[Fishburn,1970],Fishburn,P.C.,Utility Theory for Decision Making,New York
[Freud,1967],Freud,S.,Gesammelte Werke (18 Bände),Fünfte Auflage,Frankfurt/Main
[Ginsburg & Opper,1975],Ginsburg,H.und Opper,S.,Piagets Theorie der geistigen Entwicklung,Stuttgart
[Glymour,1980],Glymour,C.,Theory and Evidence,Princeton,New Jersey
[Göttner,1976],Göttner,H.,"Theorienstruktur in der Literaturwissenschaft",Grazer Philosophische Studien 2

[Greub,1967],Greub,W.H.,Linear Algebra Dritte Auflage,Berlin-Heidelberg-New York
[Händler,1979],Händler,E.W.,Logische Struktur und Referenz von mathematischen ökonomischen Theorien,Dissertation,Universität München
[Händler,1980],Händler,E.W.,"The Logical Structure of Modern Neoclassical Static Microeconomic Equilibrium Theory", Erkenntnis 15
[Händler,1980a],Händler,E.W.,"The Role of Utility and of Statistical Concepts in Empirical Economic Theories", Erkenntnis 15
[Hartkämper & Schmidt,1981],Hartkämper,A.und Schmidt,H.-J. (Hrsg.),Structure and Approximation in Physical Theories, New York und London
[Henkin et al.,1959],Henkin,L.,Suppes,P.und Tarski,A.(Hrsg.), The Axiomatic Method,Amsterdam
[Heidelberger,1976],Heidelberger,M.,"Some Intertheoretic Relations between Ptolemean and Copernican Astronomy", Erkenntnis 10
[Kamlah,1976],Kamlah,A.,"An Improved Definition of "Theoretical in a Given Theory"",Erkenntnis 10
[Kamlah,1979],Kamlah,A.,"Erläuterungen" zu [Reichenbach,1979], daselbst S.429 ff.
[Krajewski,1977],Krajewski,W.,Correspondence Principle and Growth of Science,Dordrecht
[Krantz et al.,1971],Krantz,D.H.,Luce,R.D.,Suppes,P.und Tversky,A.,Foundations of Measurement,New York-London
[Krüger,1976],Krüger,L.,"Reduction versus Elimination of Theories",Erkenntnis 10
[Krüger,1980],Krüger,L.,"Intertheoretic Relations as a Tool for the Rational Reconstruction of Scientific Development" Studies in History and Philosophy of Science 11
[Kuhn,1970],Kuhn,T.,The Structure of Scientific Revolutions Zweite Auflage,Chicago
[Kuhn,1976],Kuhn,T.S.,"Theory Change as Structure Change: Comments on the Sneed Formalism",Erkenntnis 10
[Kuhn,1977],Kuhn,T.S.,Die Entstehung des Neuen,Frankfurt/Main

[Ludwig,1978],Ludwig,G.,<u>Die Grundstrukturen einer physikalischen Theorie</u>,Berlin-Heidelberg-New York

[Malan,1972],Malan,D.H.,<u>Psychoanalytische Kurztherapie</u>,Reinbeck bei Hamburg

[Mayr,1976],Mayr,D.,"Investigations of the Concept of Reduction I",<u>Erkenntnis</u> 10

[Mayr,1981],Mayr,D.,"Investigations of the Concept of Reduction II",<u>Erkenntnis</u> 16

[McKinsey et al.,1953],McKinsey,J.C.C.,Sugar,A.C.und Suppes, P.,"Axiomatic Foundations of Classical Particle Mechanics", <u>Journal of Rational Mechanics and Analysis</u> 2

[McKinsey & Suppes,1955],McKinsey,J.C.C.und Suppes,P.,"On the Notion of Invariance in Classical Mechanics",<u>British Journal for the Philosophy of Science</u> 5

[Moulines,1975],Moulines,C.U.,"A Logical Reconstruction of Simple Equilibrium Thermodynamics",<u>Erkenntnis</u> 9

[Moulines 1976],Moulines,C.U.,"Approximate Application of Empirical Theories: A General Explication",<u>Erkenntnis</u> 10

[Moulines,1979],Moulines,C.U.,"Theory-Nets and the Evolution of Theories: The Example of Newtonian Mechanics",<u>Synthese</u> 41

[Moulines,1980],Moulines,C.U.,"Intertheoretic Approximation: The Kepler-Newton Case",<u>Synthese</u> 45

[Mosteller & Nogee],1951 ,Mosteller,F.und Nogee,P.,"An Experimental Measurement of Utility",<u>Journal of Political Economy</u> 51

[Pearce,1979],Pearce,D.A.,<u>Translation,Reduction and Equivalence: Some Topics in Intertheory Relations</u>,Dissertation, University of Sussex

[Pendse,1939],Pendse,C.G.,"A Note on the Definition and Determination of Mass in Newtonian Mechanics",<u>Philosophical Magazine</u> 24

[Przelecki,1974],Przelecki,M.,"A Set-theoretic Versus a Model-theoretic Approach",<u>Studia Logica</u> 33

[Przelecki,1976],Przelecki,M.(Hrsg.), <u>Formal Methods in the Methodology of Empirical Sciences</u>,Dordrecht

[Przelecki & Wojcicki,1977],Przelecki,M.und Wojcicki,R.(Hrsg.) <u>Twenty-five Years of Logical Methodology in Poland</u>,Dordrecht

[Przelecki,1969],Przelecki,M.,<u>The Logic of Empirical Theories</u>, London

[Putnam,1962],Putnam,H.,"What Theories are Not",in: Logic, Methodology,and the Philosophy of Science,E.Nagel et al. (Hrsg.),Stanford

[Quine & Ullian,1970],Quine,W.O.v.und Ullian,J.S.,The Web of Belief,New York

[Rantala,1980],Rantala,V.,"On the Logical Basis of the Structuralist Philosophy of Science",Erkenntnis 15

[Reichenbach,1979], Hans Reichenbach: Gesammelte Werke,Bd.3, A.Kamlah und M.Reichenbach (Hrsg.),Braunschweig/Wiesbaden

[Rindler,1969],Rindler,W.,Essential Relativity: Special, General,and Cosmological,New York

[Rubin & Suppes,1954], Rubin,H.und Suppes,P.,"Transformations of Relativistic Particle Mechanics",Pacific Journal of Mathematics 5

[Scheibe,1973],Scheibe,E.,"The Approximative Explanation and the Development of Physics" in: Logic,Methodology,and the Philosophy of Science,Vol 4, P.Suppes et al.(Hrsg.),New York

[Scheibe,1973a],Scheibe,E.,"Die Erklärung der Keplerschen Gesetze durch Newtons Gravitationsgesetz" in: Einheit und Vielheit,E.Scheibe et al.(Hrsg.),Göttingen

[Scheibe,1975],Scheibe,E.,"Vergleichbarkeit,Widerspruch und Erklärung" in: R.Haller (Hrsg.),Philosophie der Physik, Braunschweig

[Simon,1977],Simon,H.A.,Models of Discovery,Dordrecht

[Sneed,1971],Sneed,J.D.,The Logical Structure of Mathematical Physics,Erste Auflage 1971,Zweite Auflage 1979,Dordrecht

[Sneed,1978],Sneed,J.D.,"Theoretization and Invariance Principles",Acta Philosophica Fennica Vol.30,Nos.2-4,Amsterdam

[Stegmüller,1973],Stegmüller,W.,Theorie und Erfahrung,Zweiter Halbband,Berlin-Heidelberg-New York

[Stegmüller,1979],Stegmüller,W.,The Structuralist View of Theories,Berlin-Heidelberg-New York

[Stegmüller,1980],Stegmüller,W.,Neue Wege der Wissenschaftsphilosophie,Berlin-Heidelberg-New York

[Stone,1954],Stone,J.R.N.,"Linear Expenditure Systems and Demand Analysis: An Application to the Pattern of British Demand",Economic Journal 64

[Strauss,1969],Strauss,M.,"Intertheoretische Relationen", Deutsche Zeitschrift für Philosophie 17

[Suppe,1974],Suppe,F.(Hrsg.),The Structure of Scientific Theories,Urbana Illinois

[Suppes,1960],Suppes,P.,"A Comparison of the Meaning and Uses of Models in Mathematics and the Empirical Sciences", Synthese 12

[Tarski,1959],Tarski,A.,"What is Elementary Geometry?" in: Henkin,Suppes,Tarski (Hrsg.),The Axiomatic Method,Amsterdam

[Tarski,1966],Tarski,A.,Einführung in die mathematische Logik, Göttingen

[van Fraassen,1972],van Fraassen,B.C.,"A Formal Approach to the Philosophy of Science" in: R.G.Colodny (Hrsg.),Paradigms and Paradoxes,London

[van Fraassen,1974],van Fraassen,B.C.,"The Einstein-Podolski-Rosen Paradox",Synthese 29

[van Fraassen,1980],van Fraassen,B.C.,The Scientific Image, Oxford

[Vollmer,1977],Vollmer,G.,"Theoriendynamik und Ablösung einer Theorie durch eine neue (bessere): Simulation statt Erklärung" in: G.Patzig et al.(Hrsg.),Logik,Ethik,Theorie der Geisteswissenschaften,Hamburg

[Wojcicki,1974],Wojcicki,R.,"Set-theoretic Representations of Empirical Phenomena",Journal of Philosophical Logic 3

[Wojcicki,1974a],Wojcicki,R.,Topics in the Formal Methodology of Empirical Sciences,Dordrecht

[Zeeman,1964],Zeeman,E.C.,"Causality Implies the Lorentz Group",Journal of Mathematical Physics 5

Verzeichnis der Symbole und Abkürzungen

Stichwortverzeichnis